

**ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ  
ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**

№ 4 (12)

2009

**СОДЕРЖАНИЕ**

**МАТЕМАТИКА**

<i>Долгарев А. И.</i> Получение траектории движения точки по ее кривизне.....	2
<i>Бойков И. В., Паксялева О. Г., Романова Л. Д.</i> Устойчивость решений дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа.....	20
<i>Тешаев М. Х.</i> К задаче стабилизации движений механических систем, стесненных геометрическими и кинематическими связями.....	27
<i>Богданов А. Ю.</i> Новый подход к исследованию устойчивости неавтономных дискретных систем типа Лотки – Вольтерра .....	39
<i>Медведик М. Ю.</i> Субиерархический метод решения интегрального уравнения на плоских экранах произвольной формы.....	48
<i>Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г.</i> Численное решение объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокации.....	54
<i>Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г.</i> Метод псевдодифференциальных операторов для исследования объемного сингулярного интегрального уравнения электрического поля .....	70
<i>Грабовская С. М.</i> Синтез надежных неветвящихся программ с условной остановкой в полном конечном базисе, содержащем $x_1$ & $x_2$ .....	85
<i>Бойков И. В.</i> Алгоритмы управления и стабилизации дискретных систем.....	96

**ФИЗИКА**

<i>Грунская Л. В., Журавлев В. М., Ефимов В. А., Закиров А. А.</i> Методы спектрального оценивания в задаче исследования степени воздействия геофизических процессов на электрическое поле приземного слоя атмосферы .....	105
<i>Глуценко А. Г., Захарченко Е. П.</i> О возможности просветления сред в запредельных областях частот .....	118
<i>Кревчик В. Д., Семенов М. Б., Разумов А. В., Гаврина З. А., Кревчик П. В.</i> Двухфотонная спектроскопия $1D^-$ -диссипативного туннелирования в квантовых молекулах с $D^-$ -центрами .....	130
<i>Кревчик В. Д., Семенов М. Б., Разумов А. В., Гаврина З. А., Кревчик П. В.</i> $2D^-$ -туннельные бифуркации в спектрах двухфотонного поглощения света в системе двух взаимодействующих квантовых молекул .....	147

## ПОЛУЧЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПО ЕЕ КРИВИЗНЕ

*Аннотация.* Статья посвящена методам получения траекторий движения и уравнениям кривых трехмерного галилеева пространства-времени по полю ускорения. Она использует методы 3-мерной геометрии Галилея пространства-времени. Рассмотрен ряд примеров.

*Ключевые слова:* траектория движения, ускорение, галилеевы методы.

*Abstract.* The paper is devoted to the methods of obtaining of the mechanical trajectory and equation of curves three dimensional Galilean space-time by acceleration's field. It was used methods of geometry 3D Galilean space-time. We consider a number of examples.

*Keyword:* trajectory of motion, acceleration, Galilean methods.

Рассматривается движение материальной точки с двумя степенями свободы. К изучению траекторий точек и закона их движения привлекаются методы 3-мерной геометрии Галилея. Мировая линия движения точки описывается галилеевой векторной функцией; траектория движения есть проекция мировой линии на евклидову плоскость пространства-времени Галилея, пространственная составляющая мировой линии движения является законом кинематического движения материальной точки. 3-мерное пространство-время Галилея  $\Gamma^3$  является прямой суммой

$$\Gamma^3 = \mathbf{R} + \mathbf{E}^2$$

1-мерной оси времени, совпадающей с действительной числовой осью  $\mathbf{R}$ , и евклидовой плоскости  $\mathbf{E}^2$ .

Пространство-время Галилея размерности 3 изучается в [1], где рассмотрено галилеево скалярное произведение векторов и на аффинном пространстве определено пространство-время Галилея; содержится теория кривых и поверхностей. В работе [2] средствами галилеевой геометрии найдены законы движения материальной точки по заданному полю ускорений движения. К этой задаче примыкает задача написания параметрических уравнений кривой пространства Галилея по функциям их кривизны и кручения. В настоящей работе обоснованы различные методы решения указанной задачи, близкие к методам в [2, 3], где рассматриваются кривые 3-мерных одулярных галилеевых пространств. Получены галилеевы кривые по их кривизне и по кривизне их евклидовой проекции и методом разложения в степенной ряд. Рассмотрены случаи, в которых кривизна и кручение кривой постоянны, рациональны, трансцендентны. В частности получены: цикл, циклоида, парабо-

лы различной степени, окружность, развертка окружности, цепная линия, коническая спираль, астроида, кривая Штейнера и др.; их кривизна и кручение совпадают с заданными функциями. Отмечены случаи, когда кривизна и кручение кривой являются колебаниями, тогда пространственные компоненты кривой также являются колебаниями, но с другими параметрами.

### 1 Кривая пространства Галилея размерности 3

Для получения уравнений траектории движущейся материальной точки и закона движения по траектории используются методы геометрии Галилея. Приведем из [1] необходимые геометрические сведения.

#### 1.1 Пространство-время Галилея $\Gamma^3$

Векторы 3-мерного действительного линейного пространства записываем в виде

$$\vec{x} = (x, x^1, x^2)$$

с выделением первой компоненты.

Галилеева норма вектора согласно [1] равна

$$|\vec{x}| = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \neq 0, \\ \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Свойства галилеевой нормы отличаются от свойств евклидовой нормы. Например, для галилеевой нормы не выполняется неравенство треугольника. Первая компонента  $x$  вектора  $\vec{x}$  является временной, смысл этой компоненты – время; компоненты  $x^1, x^2$  – пространственные. Векторы  $(0, x^1, x^2)$  имеют евклидову норму. Если  $x \neq 0$ , то векторы  $(x, x^1, x^2)$  называются галилеевыми; а векторы  $(0, x^1, x^2)$  называются евклидовыми, они еще записываются в виде  $\vec{r} = (x^1, x^2)$ . Всякий галилеев вектор перпендикулярен всякому евклидову вектору.

Аффинное пространство, в линейном пространстве которого определена галилеева норма векторов, называется пространством Галилея; 3-мерное пространство Галилея обозначается  $\Gamma^3$ . Две точки  $A = (a, a^1, a^2)$  и  $B = (b, b^1, b^2)$  пространства Галилея определяют вектор

$$\overline{AB} = (b - a, b^1 - a^1, b^2 - a^2),$$

его норма равна

$$|\overline{AB}| = \begin{cases} |b - a|, & \text{если } b \neq a, \\ \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2}, & \text{если } b = a. \end{cases}$$

Точки пространства Галилея еще называются событиями. События  $A$  и  $B$  одновременны, если  $a = b$ . Тогда вектор  $\overline{AB}$  евклидов. Одновременные

между собой события составляют в пространстве Галилея  $\Gamma^3$  евклидову плоскость  $E^2$ . Репер пространства Галилея есть  $\mathbf{B} = (O, \vec{e}, \vec{i}, \vec{j})$ , где  $O$  – начало отсчета;  $\vec{e}$  – единичный вектор направления времени;  $\vec{i}, \vec{j}$  – евклидовы единичные взаимно перпендикулярные векторы. Точка  $O$  и евклидовы векторы  $\vec{i}, \vec{j}$  образуют евклидову плоскость  $E^2 = \langle O, \vec{i}, \vec{j} \rangle$ . Через всякую точку  $P$  пространства  $\Gamma^3$  проходит и единственная евклидова плоскость  $\langle P, \vec{i}, \vec{j} \rangle$ .

### **1.2 Кривая пространства Галилея в естественной параметризации**

Кривые пространства  $\Gamma^3$  изучаются в [1]. Регулярная кривая класса  $C^3$  3-мерного пространства Галилея  $\Gamma^3$  в естественной параметризации задается галилеевой векторной функцией

$$\gamma(t) = (t, x(t), y(t)), \quad t \in I \subseteq \mathbf{R}, \quad (1)$$

или в разложении по базисным векторам репера  $\mathbf{B} = (O, \vec{e}, \vec{i}, \vec{j})$  пространства  $\Gamma^3$ :

$$\gamma(t) = t\vec{e} + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}. \quad (2)$$

Составляющая  $t\vec{e}$  является временной, параметр  $t$  имеет смысл времени. Составляющая  $x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$  обозначается

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

и является пространственной;  $\vec{r}(t)$  является вектором евклидовой плоскости  $\langle O, \vec{i}, \vec{j} \rangle$  пространства Галилея  $\Gamma^3$ . Кривая  $\vec{r}(t)$  – это проекция галилеевой кривой  $\gamma(t)$  (1) на евклидову плоскость  $\langle O, \vec{i}, \vec{j} \rangle$ . Разложение (2) можно записать в виде

$$\gamma(t) = t\vec{e} + \vec{r}(t). \quad (3)$$

Вектор касательной к кривой (1) равен

$$\dot{\gamma}(t) = (1, \dot{x}(t), \dot{y}(t)). \quad (4)$$

Это галилеев вектор, его длина равна 1 согласно галилеевой норме векторов (п. 1.1):

$$|\dot{\gamma}| = |\dot{\gamma}(t)| = 1.$$

Кривизна кривой (1) вычисляется по формуле

$$k = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \geq 0; \quad (5)$$

формула для вычисления кручения кривой (1) такова [1]:

$$m = \frac{\ddot{x} \dot{y} - \dot{x} \ddot{y}}{k^2}. \quad (6)$$

Если задана кривая (1) пространства Галилея  $\Gamma^3$ , то определяются функции кривизны и кручения кривой:

$$k = k(t) \geq 0, \quad m = m(t). \quad (7)$$

Эти функции являются натуральными уравнениями кривой (1). Функции кривизны и кручения (7) кривой связаны формулами (5), (6) с пространственными компонентами  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  кривой (1); имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = k^2(t), \\ \ddot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = m(t)k^2(t). \end{cases} \quad (8)$$

Если заданы функции (7), то функции  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  являются решениями системы дифференциальных уравнений (8). Частный случай системы дифференциальных уравнений (8) при  $k = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$  решается в [1]; общий случай рассмотрен в [2]. Укажем еще один метод решения системы дифференциальных уравнений (8). Сначала приведем схему решения системы уравнений (8) из [2].

Вводятся обозначения

$$\ddot{x} = u, \quad \ddot{y} = v, \quad (9)$$

что позволяет понизить порядок дифференциальных уравнений системы (8):

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = k^2, \\ u\dot{v} - \dot{u}v = mk^2. \end{cases} \quad (10)$$

Ее решение есть пара функций  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ , затем, решая уравнения (9), находим функции  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

По виду первого уравнения системы (10) обозначаем:

$$u = k \cos(w + c), \quad v = k \sin(w + c), \quad (11)$$

где

$$w = w(t) = \int m(t)dt + c, \quad c = \text{const}. \quad (12)$$

Функции (11) с условием (12) удовлетворяют второму уравнению системы (10). При этом уравнения (9) принимают вид

$$\ddot{x} = k \cos(w + c), \quad \ddot{y} = k \sin(w + c). \quad (13)$$

После двукратного интегрирования этих уравнений находим компоненты  $x(t)$ ,  $y(t)$  функции (1), задающей кривую пространства Галилея  $\Gamma^3$ .

Интегрирование уравнений (13) может быть затруднено видом функции  $w = w(t)$  в (12). В этом случае возможно использование альтернативной схемы решения системы дифференциальных уравнений (8). Иногда функция  $k^2(t)$  представляется в виде суммы двух квадратов:

$$k^2(t) = k_1^2(t) + k_2^2(t). \quad (14)$$

Если функции

$$u = k_1(t), \quad v = k_2(t) \quad (15)$$

удовлетворяют второму уравнению системы (10), то дифференциальные уравнения

$$\ddot{x} = k_1(t), \quad \ddot{y} = k_2(t) \quad (16)$$

позволяют найти функции  $x(t), y(t)$  – компоненты кривой (1).

Для получения единственной кривой (1) с заданными функциями кривизны и кручения (7) вводим начальные условия для системы дифференциальных уравнений (8)

$$t = t_0, \quad x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0), \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(t_0). \quad (17)$$

## 2 Параметрические уравнения траекторий

Рассмотрим различные случаи решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8) с заданными функциями (7)  $k = k(t) \geq 0$ ,  $m = m(t)$ , содержащимися в правых частях этих уравнений. В зависимости от вида функций (7) выбирается метод решения системы уравнений (8): либо общий метод из [2], либо альтернативный метод. Указан случай, в котором альтернативным методом воспользоваться не удастся. В результате решения системы дифференциальных уравнений (8) отыскиваются параметрические уравнения мировой линии и траектории движущейся точки и кинематический закон движения материальной точки по ее траектории. Получается закон движения точки, так как параметром траектории точки является время. Галилеева кривизна траектории движения точки равна величине (модулю) вектора ускорения движения.

### 2.1 Кривизна и кручение траектории постоянны

Получим координатные задания траектории движения точки во времени по функциям кривизны и кручения мировой линии движения точки. Тем самым имеем закон движения точки.

**Траектория 1.**  $k = 0$ ,  $m = 0$ .

Согласно (13) имеем дифференциальные уравнения

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0.$$

Интегрируя их дважды, получаем общие решения

$$x = C_1 t + C_3, \quad y = C_2 t + C_4.$$

Здесь и всюду ниже  $C_i = \text{const}$ . Найдем решение системы дифференциальных уравнений (8), удовлетворяющее начальным условиям

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = a = \text{const}, \quad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = -1.$$

По данным начальным условиям имеем

$$x = t, \quad y = a - t.$$

Для линии

$$\gamma(t) = (t, t, a - t)$$

выполняются равенства  $k = 0$ ,  $m = 0$ . Получена прямая пространства Галилея как мировая линия движения точки, ее евклидова проекция – прямая

$$x = t, y = a - t,$$

является траекторией движения точки.

**Траектория 2.**  $k \neq 0$ ,  $m = 0$ .

По формуле (12)  $w = c = \text{const}$ , по (13):

$$\ddot{x} = k \cos c, \quad \ddot{y} = k \sin c.$$

В случае  $c = 0$  имеем

$$\ddot{x} = k, \quad \ddot{y} = 0,$$

тогда

$$x = \frac{k}{2}t^2 + C_1t + C_3, \quad y = C_2t + C_4.$$

В координатной галилеевой плоскости  $\langle O, \vec{e}, \vec{i} \rangle$  определяется семейство галилеевых циклов кривизны  $k \neq 0$

$$\gamma(t) = \left( t, \frac{k}{2}t^2 + C_1t + C_3 \right).$$

В пространстве Галилея  $\Gamma^3$  также определяются плоские галилеевы циклы кривизны  $k \neq 0$  и кручения  $m = 0$ :

$$\gamma(t) = \left( t, \frac{k}{2}t^2 + C_1t + C_3, C_2t + C_4 \right).$$

Начальные условия  $t = 0, x = d, y = h, \dot{x} = b, \dot{y} = 0$  выделяют цикл кривизны  $k \neq 0$ :

$$\gamma(t) = \left( t, \frac{k}{2}t^2 + bt + d, h \right).$$

Если  $c \neq 0$ , то общее решение системы дифференциальных уравнений (8) таково:

$$\gamma(t) = \left( t, \frac{k \cos c}{2}t^2 + C_1t + C_3, \frac{k \sin c}{2}t^2 + C_2t + C_4 \right).$$

При начальных условиях  $t = 0, x = d, y = 0, \dot{x} = b, \dot{y} = 0$  получается цикл

$$\gamma(t) = \left( t, \frac{k \cos c}{2}t^2 + bt + d, \frac{k \sin c}{2}t^2 \right);$$

при начальных условиях  $t = 0, x = d, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$  имеем мировую линию движущейся точки:

$$\gamma(t) = \left( t, \frac{k \cos c}{2}t^2 + d, \frac{k \sin c}{2}t^2 \right),$$

ее евклидова проекция, т.е. траектория движения, есть прямая

$$y = x \operatorname{tg} c + d$$

с угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} c$ .

**Траектория 3.**  $k \neq 0, m \neq 0$ .

В этом случае

$$w = \int md t = mt + c,$$

и уравнения (13) имеют вид

$$\ddot{x} = k \cos(mt + c), \quad \ddot{y} = k \sin(mt + c). \quad (18)$$

Определяется семейство 5-параметрических кривых

$$\gamma(t) = \left( t, -\frac{k}{m^2} \cos(mt + c) + C_1 t + C_3, -\frac{k}{m^2} \sin(mt + c) + C_2 t + C_4 \right). \quad (19)$$

Репер пространства Галилея  $\Gamma^3$  можно выбрать так, что  $C_i = 0$ . Мировые линии движущейся точки

$$\gamma(t) = \left( t, -\frac{k}{m^2} \cos(mt + c), -\frac{k}{m^2} \sin(mt + c) \right) \quad (20)$$

являются винтовыми линиями на круглом цилиндре. Направляющая цилиндра, она же траектория движения точки, есть окружность евклидовой плоскости

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{m^4}$$

радиуса  $r = \frac{k}{m^2}$ , образующая параллельно оси времени  $\langle O, \vec{e} \rangle$ .

При движении материальной точки в евклидовой плоскости по траектории

$$\vec{r}(t) = \left( -\frac{k}{m^2} \cos(mt + c), -\frac{k}{m^2} \sin(mt + c) \right), \quad (21)$$

полученной проектированием (20) на евклидову плоскость, величина  $m$  есть угловая скорость движения,  $c$  – начальная фаза. Вектор скорости равен

$$\vec{v} = \left( \frac{k}{m} \sin(mt + c), -\frac{k}{m} \cos(mt + c) \right),$$

его величина

$$|\vec{v}| = \frac{k}{|m|}.$$

Вектор ускорения движущейся точки:

$$\vec{a} = (k \sin(mt + c), k \cos(mt + c)),$$



величина ускорения есть

$$|\vec{a}| = k,$$

$\frac{1}{k}$  – это галилеева кривизна траектории движения точки.

Если  $\vec{a} = \vec{a}(t) = (a^1, a^2)$ , то его составляющие есть колебания

$$a^1 = k \sin(mt + c), a^2 = k \cos(mt + c)$$

во взаимно перпендикулярных направлениях  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  с одинаковыми амплитудами  $k$ , одинаковыми частотами  $m$  и разными начальными фазами, соответственно,  $c + \frac{\pi}{2}$  и  $c$ . Сумма колебаний, составляющих ускорение, описывает фазовую кривую – окружность

$$x^2 + y^2 = k^2,$$

и определяет траекторию (21) с уравнением

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{m^4}.$$

Мировая линия движения точки есть линия (20).

Начальные условия

$$t = 0, x = -\frac{k}{m}, y = 0, \dot{x} = b, \dot{y} = \frac{k}{m}$$

выделяют из семейства (19) линию (20), а при  $c = 0, m = 1$  начальные условия

$$t = 0, x = 0, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$$

выделяют из (19) кривую, которая проектируется на евклидову плоскость  $\langle O, \vec{i}, \vec{j} \rangle$  в циклоиду

$$x = k(1 - \cos t), y = k(t - \sin t).$$

Траектория движения точки с мировой линией (19) есть указанная циклоида. В работе [4, с. 799] отмечено, что винтовая линия может проектироваться на циклоиду.

Компоненты ускорения движущейся точки являются колебаниями. Закон движения точки определяется как сумма колебаний. Это совместное воздействие колебаний на точку задает движение точки по окружности или по циклоиде.

## **2.2 Кривизна и кручение траектории являются рациональными функциями**

**Траектория 4.**  $k = t, m = 0$ .

Находим  $w = \int m dt = c$ , тогда

$$\ddot{x} = t \cos c, \ddot{y} = t \sin c,$$

значит,

$$x = \frac{t^3}{6} \cos c + C_1 t + C_3, y = \frac{t^3}{6} \sin c + C_2 t + C_4. \quad (22)$$

При  $c \neq 0$  и начальных условиях  $t = 0, x = 0, y = b, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$  по (22) получаем галилееву кривую – мировую линию движения:

$$\gamma(t) = \left( t, \frac{t^3}{6} \cos c, \frac{t^3}{6} \sin c \right),$$

евклидова проекция которой – траектория движения, есть прямая  $y = x \operatorname{tg} c + b$ . Если  $c = 0$ , то приходим к дифференциальным уравнениям

$$\ddot{x} = k, \quad \ddot{y} = 0,$$

тогда

$$x = \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_3, \quad y = C_2 t + C_4.$$

Начальные условия  $t = 0, x = 0, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = C_2^{-1}$  при  $C_2 \neq 0$  выделяют мировую линию движения точки

$$\gamma(t) = \left( t, \frac{t^3}{6}, t \right),$$

евклидова проекция (траектория движения) которой

$$x = \frac{y^3}{6}.$$

**Траектория 5.**  $k^2 = \frac{9a^2 + b^2 t^2}{36}, \quad m = \frac{3ab}{9a^2 + b^2 t^2}.$

Согласно (12)

$$w(t) = \int \frac{3abdt}{9a^2 + b^2 t^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{bt}{3a} + c.$$

По формуле (13)

$$\ddot{x} = \frac{\sqrt{9a^2 + b^2 t^2}}{6} \cos \left( \operatorname{arctg} \frac{bt}{3a} + c \right), \quad \ddot{y} = \frac{\sqrt{9a^2 + b^2 t^2}}{6} \sin \left( \operatorname{arctg} \frac{bt}{3a} + c \right).$$

При  $c = 0$  имеем

$$\cos \left( \operatorname{arctg} \frac{bt}{3a} \right) = \pm \frac{3a}{\sqrt{9a^2 + b^2 t^2}}, \quad \sin \left( \operatorname{arctg} \frac{bt}{3a} \right) = \pm \frac{bt}{\sqrt{9a^2 + b^2 t^2}}.$$

Следовательно, при  $c = 0$

$$\ddot{x} = \frac{a}{2}, \quad \ddot{y} = \frac{bt}{6}.$$

Это равносильно разложению функции  $k^2$  на сумму квадратов:  $k^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2 t^2}{36}$ . Общие интегралы полученных уравнений таковы:

$$x = \frac{at^2}{4} + C_1 t + C_3, y = \frac{bt^3}{36} + C_2 t + C_4.$$

Начальные условия  $t=0, x=0, y=0, \dot{x}=0, \dot{y}=0$  в случае  $a=4, b=36$  выделяют функции  $x=t^2, y=t^3$ . Получена галилеева кривая – мировая линия движения:

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3),$$

ее евклидова проекция – траектория движения, есть  $\vec{r}(t) = (t^2, t^3)$  или

$$y = \sqrt[3]{x^2} -$$

полукубическая парабола.

**Траектория 6.**  $k = \frac{\sqrt{2}}{t}, m = \frac{1}{t}$ .

По формуле (12)

$$w(t) = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c.$$

Согласно (13)

$$\ddot{x} = \frac{\sqrt{2}}{t} \cos(\ln t + c), \quad \ddot{y} = \frac{\sqrt{2}}{t} \sin(\ln t + c).$$

После первого интегрирования имеем

$$\dot{x} = \sqrt{2} \sin(\ln t + c), \quad \dot{y} = \sqrt{2} \cos(\ln t + c).$$

В результате замены  $\ln t + c = u$  приходим к выражениям

$$\dot{x} = \sqrt{2} e^u \sin u + C_1,$$

$$\dot{y} = \sqrt{2} e^u \cos u + C_2;$$

тогда уравнения траектории примет вид

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2} t (\cos(\ln t + c) - \sin(\ln t + c)) + C_1 t + C_3; \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2} t (\cos(\ln t + c) + \sin(\ln t + c)) + C_2 t + C_4. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим альтернативное решение. Используя разложение

$$k^2 = \frac{2}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2},$$

можно принять

$$\ddot{x} = -\frac{1}{t}(\cos(\ln t + c) - \sin(\ln t + c)), \quad y = \frac{1}{t}(\cos(\ln t + c) - \sin(\ln t + c)). \quad (24)$$

При этом выполняются соотношения

$$\ddot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\ddot{y} = \frac{2}{t^3} \text{ и } m = \frac{1}{t},$$

т.е. функции (24) удовлетворяют второму уравнению системы (8).

Интегрируя дважды выражения (24), получаем

$$x = t \cos \ln t + C_1 t + C_3, \quad y = t \sin \ln t + C_2 t + C_4.$$

Эти значения немного проще, чем (23). При  $c = 0$  и начальных условиях  $t = 1, x = 0, y = 0, \dot{x} = 1, \dot{y} = 1$  имеем галилееву кривую – мировую линию движения точки

$$\gamma(t) = (t, t \cos \ln t, t \sin \ln t),$$

с евклидовой проекцией – траекторией движения:

$$\vec{r}(t) = (t \cos \ln t, t \sin \ln t).$$

Получились две различные параметризации одной кривой – два разных закона движения точки по траектории. Различные колебания, суммируясь, дают одну и ту же траекторию движения точки.

В последней функции выполним замену  $\ln t = v$ , тогда  $t = e^v$ . Получаем пространственную кривую  $\gamma(v) = (e^v, e^v \cos v, e^v \sin v)$ . Заменяем обозначение параметра  $v$  на  $t$ :

$$\gamma(t) = (e^t, e^t \cos t, e^t \sin t).$$

Это коническая спираль [5, задача № 420]. Если смысл параметра  $t$  в задании мировой линии движения  $\gamma(t) = (t, t \cos \ln t, t \sin \ln t)$  есть время, то имеется движение точки с двумя степенями свободы с законом  $\vec{r}(t) = (t \cos \ln t, t \sin \ln t)$ . Если для рассматриваемой галилеевой кривой  $\gamma(t)$  параметр  $t$  имеет пространственный смысл и он может быть задан как функция времени  $t = e^v$  (смысл параметра  $v$  есть время), то получаем траекторию движения с тремя степенями свободы:  $\vec{r}(t) = (e^t, e^t \cos t, e^t \sin t)$ . Но в этом случае условие  $k = \frac{\sqrt{2}}{t}$ ,  $m = \frac{1}{t}$  задает не ускорение движущейся точки или же величину ускорения не во времени, а в зависимости от пространственного параметра.

**Траектория 7.**  $k = \sqrt{1+t^2}$ ,  $m = \frac{2+t^2}{1+t^2}$ .

На основе разложения  $k^2 = 1+t^2$ , полагая  $\ddot{x} = \cos t - t \sin t$ ,  $\ddot{y} = \sin t + t \cos t$  и убедившись в том, что эти функции удовлетворяют второму уравнению системы (8), находим

$$x = \cos t + t \sin t + C_1 t + C_3, \quad y = \sin t - t \cos t + C_2 t + C_4.$$

Начальные условия  $t = 0, x = 0, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$  определяют галилееву кривую – мировую линию движения точки:

$$\gamma(t) = (t, \cos t + t \sin t, t \sin t - \cos t),$$

траектория движения

$$\vec{r}(t) = (\cos t + t \sin t, t \sin t - \cos t)$$

есть развертка окружности [5, задача № 78].

Находя  $w(t) = \int \frac{2+t^2}{1+t^2} dt$ , получаем дифференциальные уравнения

$$\ddot{x} = \sqrt{1+t^2} \cos(w(t) + c);$$

$$\ddot{y} = \sqrt{1+t^2} \sin(w(t) + c),$$

интегрирование которых более затруднительно.

По виду функции  $k^2 = 1+t^2$  возможно разложение величины  $k^2$  в сумму квадратов, и тогда по (15)

$$\ddot{x} = 1, \quad \ddot{y} = t.$$

Подсчитываем:

$$\ddot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\ddot{y} = t.$$

При введенных обозначениях второе уравнение системы (8) не удовлетворяется, следовательно, выбранные значения для  $\ddot{x}, \ddot{y}$  поставленную задачу не решают.

**Траектория 8.**  $k^2 = 4 + t^2, \quad m = \frac{6+t^2}{4+t^2}$ .

Полагаем

$$\ddot{x} = -2 \sin t - t \cos t,$$

$$\ddot{y} = 2 \cos t - t \sin t.$$

Одно из решений этих уравнений:

$$\gamma(t) = (t, t \cos t, t \sin t),$$

коническая винтовая линия [5, задача № 420, 431]. Траектория точки:  $\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t)$ .

**Траектория 9.**  $k^2 = \frac{1+4t^4}{t^4}, \quad m = -\frac{4t}{1+4t^4}$ .

Разбивая  $k^2$  в сумму квадратов, полагаем

$$\ddot{x} = -\frac{1}{t^2}, \quad \ddot{y} = 2.$$

Одно из решений выбранных уравнений дает галилееву кривую

$$\gamma(t) = (t, \ln t, t^2),$$

кривая рассматривается в [5, задача № 488]. Траектория точки:  $\vec{r}(t) = (\ln t, t^2)$ .

**Траектория 10.**  $k^2 = \frac{1+t^2}{t^6}, m = \frac{1}{1+t^2}$ .

Здесь

$$w = \operatorname{arctg} t.$$

При  $c = 0$

$$\ddot{x} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3} \cos(\operatorname{arctg} t) = \frac{1}{t^3}, \quad \ddot{y} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3} \sin(\operatorname{arctg} t) = -\frac{1}{t^2}.$$

Получаем семейство кривых

$$\gamma(t) = \left( t, \frac{1}{2t} + C_1 t + C_3, \ln t + C_2 t + C_4 \right),$$

начальные условия  $t = 1, x = \frac{3}{2}, y = 0, \dot{x} = \frac{1}{2}, \dot{y} = 0$  выделяют кривую

$$\gamma(t) = \left( t, \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right), \ln t \right),$$

траектория движения точки  $\vec{r}(t) = \left( \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right), \ln t \right)$  есть цепная линия [5, задача № 90].

**Траектория 11.**  $k = t, m = \frac{1}{t}$ .

По формуле (12)  $w(t) = \ln t + c$ , по (13)  $\ddot{x} = t \cos(\ln t + c), \ddot{y} = t \sin(\ln t + c)$ . После двукратного интегрирования получаются уравнения траектории:

$$x = \frac{1}{2} t \cos(\ln t + c) + C_1 t + C_3, \quad y = \frac{1}{2} t \sin(\ln t + c) + C_2 t + C_4.$$

Это та же кривая, что и в случае траектории 6, определяемая несколько иначе.

### 2.3 Кривизна и кручение траектории трансцендентны

**Траектория 12.**  $k^2 = 9(1 - 3 \sin^2 t \cos^2 t), m = -\frac{2 - 3 \sin^2 t \cos^2 t}{1 - 3 \sin^2 t \cos^2 t}$ .

Функции

$$\ddot{x} = 6 \cos t - 9 \cos^3 t, \quad \ddot{y} = 6 \sin t - 9 \sin^3 t$$

таковы, что  $\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = k^2$  и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (8). Получаем в результате интегрирования следующие функции:

$$x = \cos^3 t + C_1 t + C_3,$$

$$y = \sin^3 t + C_2 t + C_4.$$

При  $C_i = 0$  имеем мировую линию движения

$$\gamma(t) = (t, \cos^3 t, \sin^3 t),$$

траектория движения точки есть астроида

$$\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Астроида в другой параметризации получается при условиях

$$k^2 = \frac{R^2}{2^{11}} (41 + 9 \cos t),$$

$$m = -\frac{10}{41 + 9 \cos t}.$$

Функция  $k^2$  разлагается в сумму квадратов  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ , где

$$\dot{x} = -\frac{R}{2^6} \left( \cos \frac{t}{4} + 9 \cos \frac{3t}{4} \right),$$

$$\dot{y} = \frac{R}{2^6} \left( -\sin \frac{t}{4} + 9 \sin \frac{3t}{4} \right),$$

одно из решений:

$$x = \frac{R}{4} \left( \cos \frac{t}{4} + \cos \frac{3t}{4} \right), \quad y = \frac{R}{4} \left( \sin \frac{t}{4} - \sin \frac{3t}{4} \right).$$

Эта параметризация астроиды приведена в [6, с. 130]. Функции  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  есть суммы колебаний, соответственно, в направлениях координатных осей  $Ox$  и  $Oy$  с различными частотами  $\frac{1}{4}$  и  $\frac{3}{4}$  с разностью фаз  $\frac{\pi}{2}$  в разных направлениях. Амплитуды различны.

Траектория движения материальной точки получается как сумма колебаний с одинаковыми амплитудами, разницей фаз  $\frac{\pi}{2}$  и слагаемыми с частотами  $\frac{1}{4}$  и  $\frac{3}{4}$ .

**Траектория 13.**  $k^2 = 4 + e^{2t}$ ,  $m = \frac{2e^t}{4 + e^{2t}}$ .

Разложение  $k^2$  в сумму квадратов дает  $\dot{x} = 2$ ,  $\dot{y} = e^t$ . Одно из решений:  $x = t^2$ ,  $y = e^t$ . Проекция мировой линии  $\gamma(t) = (t, t^2, e^t)$  есть траектория из [5, задача № 428].

**Траектория 14.**  $k = \operatorname{ch} 2t, m = \frac{1}{\operatorname{ch} 2t}$ .

По разложению  $\operatorname{ch} 2t = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t$  полагаем  $\ddot{x} = \operatorname{ch} t, \ddot{y} = \operatorname{sh} t$ . Получаем, в частности, кривую  $\gamma(t) = (t, \operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ , траектория движения – гипербола  $\vec{r}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$  [5, задача № 88].

Функции кривизны и кручения мировой линии движения точки в параметрах траекторий 11 и 14 связаны одним и тем же соотношением:  $m = \frac{1}{k}$ .

Траектории получились различными.

**Траектория 15.**  $k^2 = \frac{4}{81}(5 + 4 \cos t), m = -3 \frac{7 + 2 \cos t}{5 + 4 \cos t}$ .

Функция  $k^2$  может быть разложена в сумму квадратов:

$$\ddot{x} = -\frac{2}{9} \left( \cos \frac{t}{3} + 2 \cos \frac{2t}{3} \right),$$

$$\ddot{y} = \frac{2}{9} \left( -\sin \frac{t}{3} + 2 \sin \frac{2t}{3} \right),$$

решения этих уравнений:

$$x = 2 \left( \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{2t}{3} \right), y = 2 \left( \sin \frac{t}{3} - \sin \frac{2t}{3} \right).$$

Получились уравнения траектории движения точки как параметрические уравнения кривой Штейнера [6, с. 124].

Каждая компонента  $\ddot{x}, \ddot{y}$  есть сумма колебаний с различными частотами и различными амплитудами. Компоненты  $x, y$  есть суммы колебаний с различными частотами и одинаковыми амплитудами. Сумма колебаний во взаимно перпендикулярных направлениях и разницей фаз  $\frac{\pi}{2}$  дает кривую Штейнера.

### 3 Траектории движущейся точки и галилеевы кривые

#### 3.1 Получение траектории движущейся точки по мировой линии движения

Пусть мировая линия движущейся материальной точки задана в естественной параметризации, см. (1):

$$\gamma(t) = (t, x(t), y(t)), t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}.$$

Пространственная составляющая мировой линии точки является ее траекторией (см. п. 1.2):

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)). \quad (25)$$

Если заданы кривизна  $k = k(t) \geq 0$  и кручение  $m = m(t)$  мировой линии движения точки, то компоненты  $x = x(t), y = y(t)$  траектории движущейся



точки определяются как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8). В разд. 2 настоящей работы приведены примеры получения траекторий точки по заданным характеристикам мировой линии движения. В работе [2] обосновано получение уравнений траектории по полю ускорений движущейся точки. В разд. 2 имеются примеры получения траекторий точки по функциям  $\ddot{x}(t)$ ,  $\ddot{y}(t)$  – компонентам поля ускорений.

Некоторые траектории являются результатом сложения колебаний (см. траектории 3, 12, 15) и задаются как колебания.

### 3.2 Получение траектории движущейся точки по функции ускорения движения и по кривизне траектории

Мировая линия движущейся материальной точки характеризуется кривизной и кручением. Проекция мировой линии точки в евклидову плоскость есть траектория движения точки. Траектория точки характеризуется кривизной. Кривизна мировой линии движения является величиной (модулем) ускорения.

**Теорема.** Уравнения траектории движущейся точки определяются функцией ускорения и кривизной траектории.

# Пусть  $k^e(t) = k^e > 0$  – кривизна траектории (25) движущейся точки, это кривизна евклидовой кривой. В работе [1] установлена зависимость функции  $k^e$  кривизны евклидовой кривой (25) и функций кривизны  $k = k(t) \geq 0$  и кручения  $m = m(t)$  мировой линии движения точки,

$$kk^e = m^2,$$

(см. [1, с. 67]), отсюда находим

$$m = \pm \sqrt{kk^e}.$$

Теперь компоненты траектории  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  отыскиваются в схеме, изложенной в п. 1.2. Учитывая два знака в формуле для кручения  $m$ , получаем два семейства траекторий  $\vec{r}(t)$ . По заданным начальным условиям выбираем в каждом из семейств кривых одну траекторию.

Функции  $k^e(t)$  и  $k(t)$  определяют траекторию с точностью до знака кручения мировой линии движения. #

### 3.3 Использование степенных рядов

В решении некоторых конкретных задач для получения кривой по функциям кривизны и кручения приходится использовать общую схему, однако не всегда выполнимо интегрирование в элементарных функциях. Пусть функции кривизны и кручения таковы:

$$k(t) = \frac{1}{t}, \quad m(t) = \frac{t}{2}; \quad t \neq 0.$$

Согласно (12)

$$w(t) = \int \frac{t}{2} dt = t^2 + c.$$

По формуле (13) вводим функции

$$\ddot{x} = \frac{1}{t} \cos(t^2 + c), \ddot{y} = \frac{1}{t} \sin(t^2 + c).$$

Решая эти уравнения, получаем галилееву кривую с заданными кривизной и кручением. Введенные функции  $\ddot{x}(t)$ ,  $\ddot{y}(t)$  не интегрируемы в элементарных функциях; используются интегральные синус и косинус. Можно разложить функции  $\ddot{x}(t)$ ,  $\ddot{y}(t)$  в степенные ряды – ряды Тейлора. После интегрирования получаются ряды, сходящиеся на тех же интервалах, что и ряды для функций  $\ddot{x}(t)$ ,  $\ddot{y}(t)$ .

### **3.4 Кривые пространства Галилея**

Выше рассмотрено получение координатных уравнений кривых 3-мерного пространства-времени Галилея  $\Gamma^3$  как мировых линий движущейся материальной точки по функциям (7) кривизны и кручения этих кривых, по вектору второй производной (по полю ускорения точки) и по другим условиям. Получены кривые, кривизна и кручение которых совпадают с заданными функциями. Компоненты кривых являются решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Начальные условия указанных систем уравнений выделяют единственную кривую с заданными характеристиками. Тем самым имеется приложение теории кривых пространства Галилея в механике.

#### **Список литературы**

1. **Долгарев, А. И.** Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств: монография / А. И. Долгарев. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2005. – 306 с.
2. **Долгарев, А. И.** Методы одулярной галилеевой геометрии в описании механических движений / А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 3. – С. 12–24.
3. **Долгарев, А. И.** Кривые 3-мерных вейлевских одулярных пространств и кривые евклидовой плоскости / А. И. Долгарев // Дифференциальная геометрия многообразий фигур : межвуз. тем. сб. научн. тр. – Вып. 33. – Калининград : КГУ, 2002. – С. 25–28.
4. **Выгодский, М. Я.** Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М. : Физматгиз, 1963. – 872 с.
5. **Белько, И. В.** Сборник задач по дифференциальной геометрии / И. В. Белько, В. И. Ведерников [и др.]. – М. : Наука, 1979. – 272 с.
6. **Савелов, А. А.** Плоские кривые / А. А. Савелов. – М. : Физматгиз, 1960. – 294 с.

---

**Долгарев Артур Иванович**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет

E-mail: delivar@yandex.ru

**Dolgarev Artur Ivanovich**

Candidate of physico-mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University

УДК 514.126 + 531

**Долгарев, А. И.**

**Получение траектории движения точки по ее кривизне / А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 2–19.**

## УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

*Аннотация.* Получены достаточные условия устойчивости систем параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от времени и пространственных координат.

*Ключевые слова:* устойчивость, системы параболических уравнений.

*Abstract.* Given the sufficient conditions of stability of parabolic systems. The coefficients of parabolic systems are depended on time and space coordinates.

*Keywords:* stability, systems of parabolic equations.

Исследованию устойчивости решений различных классов уравнений в частных производных посвящена обширная литература, подробная библиография которой приведена в [1–3]. Основным аппаратом исследования устойчивости решений линейных и нелинейных уравнений в частных производных является применение преобразования Фурье и построение обобщенных функционалов Ляпунова.

В работе [4] был предложен метод построения критериев устойчивости решений систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа, основанный на исследовании спектров и логарифмических норм специальным образом построенных семейств линейных операторов. Недостатком этого метода является то обстоятельство, что он применим только к уравнениям, определенным во всем пространстве пространственных переменных.

В данной работе предложен другой метод исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений параболического типа. Этот метод применим к уравнениям, заданным в конечных областях. Он является распространением метода, описанного в [5], на системы уравнений в частных производных параболического типа.

Отметим, что предлагаемые ниже критерии устойчивости могут быть распространены и на некоторые другие системы дифференциальных уравнений с распределенными параметрами.

В данной работе рассматриваются системы линейных параболических уравнений, имеющие при любых начальных значениях из рассматриваемой области решения, определенные при всех значениях  $t \in [t_0, \infty)$ .

При исследовании устойчивости решений линейных параболических уравнений ограничимся рассмотрением уравнений

$$\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} = a_{11}(t, x)\Delta u_1(t, x) + a_{12}(t, x)\Delta u_2(t, x) + a_{13}(t, x)u_1(t, x) + a_{14}(t, x)u_2(t, x);$$

$$\frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = a_{21}(t, x)\Delta u_1(t, x) + a_{22}(t, x)\Delta u_2(t, x) +$$

$$+a_{23}(t,x)u_1(t,x) + a_{24}(t,x)u_2(t,x) \quad (1)$$

в ограниченных областях  $\Omega$  с гладкой границей  $\Gamma = \partial\Omega$ . Здесь  $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x))$ ,  $x = (x_1, x_2)$ .

Из проводимых ниже рассуждений следует, что полученные результаты распространяются на системы размерности большей двух.

Уравнение (1) имеет тривиальное решение при нулевых начальном и граничном условиях. Будем исследовать устойчивость тривиального решения при нулевом граничном условии

$$u(t,x)|_{x \in \Gamma} = 0 \quad (2)$$

и при возмущении начального условия

$$u(t_0, x) = u_1(x). \quad (3)$$

Исследование устойчивости решения системы уравнений (1) при граничном значении (2) будем проводить в пространстве функций  $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x))$  с нормой

$$\|u(t)\|^2 = \iint_{\Omega} (u_1^2(t,x) + u_2^2(t,x)) dx.$$

Умножим первое из уравнений системы (1) на  $u_1(t,x)$ , второе – на  $u_2(t,x)$  и проинтегрируем каждое из них по рассматриваемой области интегрирования. В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} u_1^2(t,x) dx &= \iint_{\Omega} a_{11}(t,x) u_1(t,x) \Delta u_1(t,x) dx + \\ &+ \iint_{\Omega} a_{12}(t,x) u_1(t,x) \Delta u_2(t,x) dx + \\ &+ \iint_{\Omega} a_{13}(t,x) u_1^2(t,x) dx + \iint_{\Omega} a_{14}(t,x) u_1(t,x) u_2(t,x) dx; \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} u_2^2(t,x) dx &= \iint_{\Omega} a_{21}(t,x) u_2(t,x) \Delta u_1(t,x) dx + \\ &+ \iint_{\Omega} a_{22}(t,x) u_2(t,x) \Delta u_2(t,x) dx + \\ &+ \iint_{\Omega} a_{23}(t,x) u_1(t,x) u_2(t,x) dx + \iint_{\Omega} a_{24}(t,x) u_2^2(t,x) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользуемся интегральной теоремой Остроградского – Гаусса

$$\iint_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } v) dx + \iint_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \quad (5)$$

где  $n$  – единичная нормаль к контуру  $\Gamma$ .

Положим  $v(t, x) = u_1(t, x)a_{11}(t, x)$ .

Известно, что

$$\text{grad}(u_1(t, x)a_{11}(t, x)) = a_{11}(t, x)\text{grad}u_1(t, x) + u_1(t, x)\text{grad}a_{11}(t, x).$$

Так как на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$   $u_1(t, x) = 0$ , то из равенства (5) следует, что

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} a_{11}(t, x)u_1(t, x)\Delta u_1(t, x)dx &= -\iint_{\Omega} (a_{11}(t, x)\text{grad}u_1(t, x), \text{grad}u_1(t, x))dx - \\ &\quad -\iint_{\Omega} (u_1(t, x)\text{grad}a_{11}(t, x), \text{grad}u_1(t, x))dx. \end{aligned}$$

Следовательно, если функции  $a_{11}(t, x)$ ,  $a_{12}(t, x)$ ,  $a_{21}(t, x)$ ,  $a_{22}(t, x)$  зависят только от  $t$ , то приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} u_1^2(t, x)dx &= -a_{11}(t) \iint_{\Omega} (\text{grad}u_1(t, x), \text{grad}u_1(t, x))dx - \\ &\quad -a_{12}(t) \iint_{\Omega} (\text{grad}u_1(t, x), \text{grad}u_2(t, x))dx + \\ &\quad + \iint_{\Omega} a_{13}(t, x)u_1^2(t, x)dx + \iint_{\Omega} a_{14}(t, x)u_1(t, x)u_2(t, x)dx; \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} u_2^2(t, x)dx &= -a_{21}(t) \iint_{\Omega} (\text{grad}u_1(t, x), \text{grad}u_2(t, x))dx - \\ &\quad -a_{22}(t) \iint_{\Omega} (\text{grad}u_2(t, x), \text{grad}u_2(t, x))dx + \\ &\quad + \iint_{\Omega} a_{23}(t, x)u_1(t, x)u_2(t, x)dx + \iint_{\Omega} a_{24}(t, x)u_2^2(t, x)dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Исследуем устойчивость решения системы уравнений (6) в предположении, что функции  $a_{ij}(t, x)$ ,  $i=1,2$ ,  $j=1,2,3,4$ , не зависят от  $x$ . В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} u_1^2(t, x)dx &= -2a_{11}(t) \iint_{\Omega} (\text{grad}u_1(t, x))^2 dx - \\ &\quad -2a_{12}(t) \iint_{\Omega} (\text{grad}u_1(t, x), \text{grad}u_2(t, x))dx + \\ &\quad + 2a_{13}(t) \iint_{\Omega} u_1^2(t, x)dx + 2a_{14}(t) \iint_{\Omega} u_1(t, x)u_2(t, x)dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_2^2(t, x) dx &= -2a_{21}(t) \int_{\Omega} (\text{grad } u_1(t, x), \text{grad } u_2(t, x)) dx - \\
-2a_{22}(t) \int_{\Omega} (\text{grad } u_2(t, x))^2 dx &+ 2a_{23}(t) \int_{\Omega} u_1(t, x) u_2(t, x) dx + \\
+ 2a_{24}(t) \int_{\Omega} u_2^2(t, x) dx. &
\end{aligned} \tag{7}$$

Сложим первое и второе уравнения системы (7). В результате приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_1^2(t, x) + u_2^2(t, x)) dx &= f(t) = \\
&= -2a_{11}(t) \int_{\Omega} (\text{grad } u_1(t, x), \text{grad } u_1(t, x)) dx - \\
-2(a_{12}(t) + a_{21}(t)) \int_{\Omega} (\text{grad } u_1(t, x), \text{grad } u_2(t, x)) dx &+ \\
+ 2(a_{14}(t) + a_{23}(t)) \int_{\Omega} (u_1(t, x), u_2(t, x)) dx &+ \\
+ 2a_{13}(t) \int_{\Omega} u_1^2(t, x) dx + 2a_{24}(t) \int_{\Omega} u_2^2(t, x) dx - & \\
-2a_{22}(t) \int_{\Omega} (\text{grad } u_2(t, x), \text{grad } u_2(t, x)) dx. &
\end{aligned} \tag{8}$$

Преобразуем функцию  $f(t)$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
f(t) &= -(a_{12}(t) + a_{21}(t)) \int_{\Omega} (\text{grad } u_1(t, x) + \text{grad } u_2(t, x))^2 dx + \\
&+ (a_{12}(t) + a_{21}(t) - 2a_{11}(t)) \int_{\Omega} (\text{grad } u_1(t, x))^2 dx + \\
&+ (a_{12}(t) + a_{21}(t) - 2a_{22}(t)) \int_{\Omega} (\text{grad } u_2(t, x))^2 dx + \\
&+ (a_{14}(t) + a_{23}(t)) \int_{\Omega} (u_1(t, x) + u_2(t, x))^2 dx - \\
&- (a_{14}(t) + a_{23}(t) - 2a_{13}(t)) \int_{\Omega} u_1^2(t, x) dx - \\
&- (a_{14}(t) + a_{23}(t) - 2a_{24}(t)) \int_{\Omega} u_2^2(t, x) dx.
\end{aligned}$$

Предыдущую функцию можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & -(a_{12}(t) + a_{21}(t)) \iint_{\Omega} (\text{grad } u_1(t, x) + \text{grad } u_2(t, x))^2 dx + \\
 & + (a_{12}(t) + a_{21}(t) - 2a_{11}(t)) \iint_{\Omega} (\text{grad } u_1(t, x))^2 dx + \\
 & + (a_{12}(t) + a_{21}(t) - 2a_{22}(t)) \iint_{\Omega} (\text{grad } u_2(t, x))^2 dx + \\
 & + (a_{14}(t) + a_{23}(t)) \iint_{\Omega} (u_1(t, x) + u_2(t, x))^2 dx - \\
 & - (a_{14}(t) + a_{23}(t) - 2a_{13}(t)) \iint_{\Omega} (u_1^2(t, x) + u_2^2(t, x)) dx + \\
 & + (2a_{24}(t) - 2a_{13}(t)) \iint_{\Omega} u_2^2(t, x) dx.
 \end{aligned}$$

Предположим, что выполнены следующие условия при всех значениях  $t(t \geq t_0)$ :

$$\begin{aligned}
 a_{12}(t) + a_{21}(t) & \geq 0, & a_{12}(t) + a_{21}(t) - 2a_{11}(t) & \leq 0; \\
 a_{12}(t) + a_{21}(t) - 2a_{22}(t) & \leq 0, & a_{14}(t) + a_{23}(t) & \leq 0; \\
 a_{14}(t) + a_{23}(t) - 2a_{13}(t) & > 0, & a_{24}(t) - a_{13}(t) & \leq 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что условия (9) непротиворечивы. Тогда при всех значениях  $t(t \geq t_0)$

$$f(t) \leq f_1(t), \tag{10}$$

где

$$f_1(t) = -(a_{14}(t) + a_{23}(t) - 2a_{13}(t)) \iint_{\Omega} (u_1^2(t, x) + u_2^2(t, x)) dx.$$

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} (u_1^2(t, x) + u_2^2(t, x)) dx = \\
 & = -(a_{14}(t) + a_{23}(t) - 2a_{13}(t)) \iint_{\Omega} (u_1^2(t, x) + u_2^2(t, x)) dx.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Очевидно, что если при всех значениях  $t(t \geq t_0)$  выполняется условие

$$-(a_{14}(t) + a_{23}(t) - 2a_{13}(t)) < 0, \tag{12}$$

то решение уравнения (11) устойчиво при любом начальном приближении.



**Замечание.** Если, начиная с некоторого значения  $T$ , выполняется неравенство

$$-(a_{14}(t) + a_{23}(t) - 2a_{13}(t)) \leq -\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (13)$$

то решение уравнения (11) устойчиво в целом.

Так как при сделанных предположениях  $f(t) \leq f_1(t)$ , то из теоремы Чаплыгина [6, с. 5] следует, что из устойчивости (асимптотической устойчивости) решения уравнения (11) следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) решения уравнения (8).

Функцию  $f(t)$  можно также представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(t) = & -(a_{12}(t) + a_{21}(t)) \iint_{\Omega} (\text{grad } u_1(t, x) + \text{grad } u_2(t, x))^2 dx + \\ & + (a_{12}(t) + a_{21}(t) - 2a_{11}(t)) \iint_{\Omega} (\text{grad } u_1(t, x))^2 dx + \\ & + (a_{12}(t) + a_{21}(t) - 2a_{22}(t)) \iint_{\Omega} (\text{grad } u_2(t, x))^2 dx + \\ & + (a_{14}(t) + a_{23}(t)) \iint_{\Omega} (u_1(t, x) + u_2(t, x))^2 dx - \\ & - (a_{14}(t) + a_{23}(t) - 2a_{24}(t)) \iint_{\Omega} (u_1^2(t, x) + u_2^2(t, x)) dx - \\ & - (2a_{24}(t) - 2a_{13}(t)) \iint_{\Omega} u_1^2(t, x) dx. \end{aligned}$$

Тогда при выполнении условий

$$\begin{aligned} a_{12}(t) + a_{21}(t) & \geq 0, \quad a_{12}(t) + a_{21}(t) - 2a_{11}(t) \leq 0; \\ a_{12}(t) + a_{21}(t) - 2a_{22}(t) & \leq 0, \quad a_{14}(t) + a_{23}(t) \leq 0; \\ a_{14}(t) + a_{23}(t) - 2a_{24}(t) & > 0, \quad a_{24}(t) - a_{23}(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

выполняется неравенство  $f(t) \leq f_2(t)$ , где

$$f_2(t) = -(a_{14}(t) + a_{23}(t) - 2a_{24}(t)) \iint_{\Omega} (u_1^2(t, x) + u_2^2(t, x)) dx.$$

Теперь, повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся, что при выполнении условий (14) система уравнений (1) устойчива, а при выполнении условий (14) и условия

$$-(a_{14}(t) + a_{23}(t) - 2a_{24}(t)) \leq -\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (15)$$

она асимптотически устойчива.

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (9) или (14). Тогда решение системы уравнений (1) устойчиво.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (9) и (13) или (14) и (15). Тогда решение системы уравнений (1) асимптотически устойчиво.

**Список литературы**

1. **Эйдельман, С. Д.** Параболические системы / С. Д. Эйдельман. – М. : Наука, 1964. – 444 с.
2. **Сиразетдинов, Т. К.** Устойчивость систем с распределенными параметрами / Т. К. Сиразетдинов. – М. : Наука, 1987. – 232 с.
3. **Шестаков, А. А.** Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами / А. А. Шестаков. – М. : Наука, 1990. – 320 с.
4. **Бойков, И. В.** Об определении областей устойчивости для некоторых классов нелинейных уравнений с распределенными параметрами / И. В. Бойков // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 1. – С. 40–49.
5. **Пу, Т.** Нелинейная экономическая динамика / Т. Пу. – Ижевск : Издательский дом «Удмурдский университет», 2000. – 200 с.
6. **Мартынюк, А. А.** Устойчивость движения. Метод интегральных неравенств / А. А. Мартынюк, В. Лакшмикантам, С. Лиля. – Киев : Наукова думка, 1989. – 272 с.

---

**Бойков Илья Владимирович**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
высшей и прикладной математики,  
Пензенский государственный  
университет

E-mail: math@pnzgu.ru

**Boykov Ilya Vladimirovich**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
professor, head of sub-department  
of higher and applied mathematics,  
Penza State University

**Паксялева Оксана Геннадьевна**

аспирант, Пензенский государственный  
университет

E-mail: math@pnzgu.ru

**Paksyaleva Oksana Gennadyevna**

Postgraduate student,  
Penza State University

**Романова Людмила Дмитриевна**

доцент, кафедра высшей и прикладной  
математики, Пензенский  
государственный университет

E-mail: math@pnzgu.ru

**Romanova Lyudmila Dmitrievna**

Associate professor, sub-department  
of higher and applied mathematics,  
Penza State University

---

УДК 517.19

**Бойков, И. В.**

**Устойчивость решений дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа / И. В. Бойков, О. Г. Паксялева, Л. Д. Романова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 20–26.**

## К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СТЕСНЕННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ И КИНЕМАТИЧЕСКИМИ СЕРВОСВЯЗЯМИ

*Аннотация.* В работе выводятся уравнения движения механических систем, стесненных геометрическими и кинематическими связями первого и второго рода. Получен явный вид сил реакций сервосвязей, а также рассматриваются вопросы устойчивости системы в отношении многообразия, определяемого сервосвязями.

*Ключевые слова:* сервосвязь, (А)-перемещения, параметрическое освобождение, принуждения реакций, скоростные параметры, параметры освобождения, квазиордината, квазискорость, устойчивость, невозмущенное движение.

*Abstract.* In work the equations of motion of the mechanical systems constrained by geometrical and kinematical constraints of the first and second sort are deduced. The obvious kind of forces of reactions of servo constraints is received, and also questions of stability of system under the relation of the variety defined by servo constraints are considered.

*Keywords:* servo constraint, (A)-moving, parametrical clearing, compulsions of reactions, high-speed parameters, clearing parameters, quasicoordinate, quasispeed, the stability, not indignant movement.

Впервые в аналитическую динамику понятие о сервосвязях было введено А. Бегеном [1]. Методы, используемые А. Бегеном, получили свое дальнейшее развитие в работах П. Аппеля [2], А. Пщеборского [3], В. С. Новоселова [4], М. Ф. Шульгина [5], В. В. Румянцева [6, 7], В. И. Киргетова [8], А. Г. Азизова [9, 10] и др. В этих исследованиях большое внимание было уделено обобщению основных принципов динамики на системы с сервосвязями, составлению уравнений движения, определению реакций сервосвязей. Распространение методов аналитической механики на системы с сервосвязями основывалось главным образом на учете особенностей, связанных с неидеальностью сервосвязей, которое проявляется в том, что для таких систем элементарная работа сил реакций сервосвязей на возможных перемещениях, допускаемых связями, не равна нулю [1, 2, 9, 10].

Несмотря на важность исследования указанной особенности сервосвязей, приложения методов аналитической динамики к широкому кругу конкретных задач требуют учета и других особенностей, связанных с устойчивой реализацией сервосвязей. На это обстоятельство впервые было обращено внимание Ш. С. Нугмановой [11]. Опираясь на теорию параметрического освобождения [12] и теорию вынужденных движений [13], А. Г. Азизовым была построена теория, позволяющая расширить область практической применимости методов аналитической механики систем с сервосвязями, включая вопросы их устойчивой реализации [9, 10]. К системам с сервосвязями близка теория построения систем программного движения [14], созданная в основном работами А. С. Галиулина и его учеников.

А. Г. Азизовым разработан алгоритм отыскания структуры сил реакций сервосвязей [9, 10]. Однако в этих работах не уточняется явный вид сил реак-

ций сервосвязей, что важно для формирования реакций сервосвязей и их реализации.

В данной работе выводятся уравнения движения систем, стесненных геометрическими и кинематическими связями первого и второго рода, а также определен явный вид сил реакций сервосвязей.

Пусть на механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами  $q_1, \dots, q_n$ , наложены ограничения в виде обычных неголономных идеальных связей

$$\sum_{i=1}^n b_{\beta i} \dot{q}_i + b_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, \dots, b), \quad (1)$$

а также сервосвязей [1] вида

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha}(t, q_1, \dots, q_n) &= 0 \quad (\alpha = 1, \dots, a); \\ \Psi_{\gamma}(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) &= 0 \quad (\gamma = 1, \dots, c), \quad (a + c = \kappa). \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагается, что среди возможных перемещений, допускаемых связями (1), имеются такие, определяемые независимыми уравнениями

$$\sum_{i=1}^n a_{\theta_2 i}(t, q_1, \dots, q_n) \delta q_i = 0 \quad (\theta_2 = 1, \dots, \kappa), \quad (3)$$

на которых реакции связей второго рода работы не производят [6].

Имея в виду параметрическое освобождение системы от сервосвязей, введем независимые дополнительные параметры [9, 10], соответствующие преобразованию систем с сервосвязями к виду

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha}^*(t, q_1, \dots, q_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_a) &= 0, \quad \Psi_{\gamma}^*(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \xi_1, \dots, \xi_c) = 0 \quad (4) \\ (\alpha &= 1, \dots, a; \gamma = 1, \dots, c; a + c = \kappa), \end{aligned}$$

где  $\eta_p, \xi_{\delta}$  – параметры, характеризующие освобождение системы соответственно от первой и второй групп уравнений (2). Нулевые значения параметров  $\eta_p, \xi_{\delta}$  и их производных  $\dot{\eta}_p, \dot{\xi}_{\delta}$  соответствуют связям (2) и их продифференцированным формам. За эти величины могут быть взяты, например, левые части уравнений (2), вычисляемые на действительном движении системы [14].

Обозначив через  $N_p$  и  $P_{\delta}$  принуждения реакций, относящиеся соответственно к параметрам  $\eta_p, \xi_{\delta}$ , будем предполагать, что последние вынужденно изменяются согласно дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_p &= N_p \quad (p = 1, \dots, a); \\ \dot{\xi}_{\delta} &= P_{\delta} \quad (\delta = 1, \dots, c). \end{aligned} \quad (5)$$

Определяя работу принуждений на перемещениях  $\delta\eta_p, \delta\xi_{\delta}$  выражением

$$\sum_{p=1}^a N_p \delta\eta_p + \sum_{\delta=1}^c P_{\delta} \delta\xi_{\delta},$$

для параметрически освобожденной системы будем иметь

$$\delta A = \sum_{i=1}^n R_i^{(2)} \delta q_i + \sum_{p=1}^a N_p \delta \eta_p + \sum_{\delta=1}^c P_\delta \delta \xi_\delta. \quad (6)$$

Пусть из способа действия реакций связей второго рода следует, что на (А)-перемещениях [6] работа реакций связей второго рода равна нулю как для неосвобожденной, так и параметрически освобожденной систем. Тогда при произвольных принуждениях реакций работа (6) обратится в нуль при условиях

$$\delta \eta_p = 0; \delta \xi_\delta = 0 \quad (p = 1, \dots, a; \delta = 1, \dots, c).$$

С учетом первой группы уравнений (2), (4) вместо обобщенных координат  $q_1, \dots, q_a$  введем параметры  $\eta_1, \dots, \eta_a$ . Соотношениями, тождественно удовлетворяющими уравнениям (1) и второй группе уравнений (4), введем скоростные параметры [15]  $e_v$ :

$$\dot{Z}_i = \sum_{v=b+1}^n d_{iv} e_v + d_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

где  $\dot{Z}_i = \dot{\eta}_i$  ( $i = 1, \dots, a$ ),  $\dot{Z}_i = \dot{q}_i$  ( $i = a + 1, \dots, n$ ), и за первые  $a + c = k$  скоростных параметров  $e_v$  выберем  $\dot{\eta}_\alpha, \xi_\delta$ . Тогда уравнения (3) в неголономных координатах [15] будут иметь вид

$$\sum_{i=1}^n a_{\theta_2 i} \sum_{v=b+1}^n d_{iv} \delta \pi_v = \sum_{v=b+1}^n \tilde{a}_{\theta_2 v} \delta \pi_v = 0 \quad (\theta_2 = 1, \dots, k), \quad (7)$$

где  $\pi_v$  – квазикоордината, соответствующая скоростному параметру  $e_v$ .

Тогда из преобразованного общего уравнения динамики [15]

$$\sum_{v=b+1}^n \left( \frac{\partial S}{\partial \dot{e}_v} \right) \delta \pi_v = 0$$

на (А)-перемещениях (7) получим уравнения движения с множителями сервосвязей

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{e}_v} = Q_v + \sum_{\theta_2=1}^k \lambda_{\theta_2} \tilde{a}_{\theta_2 v} \quad (v = b + 1, \dots, n), \quad (8)$$

где  $S$  – энергия ускорений системы;  $\lambda_{\theta_2}$  – множители связей.

При обозначениях

$$\dot{\eta}_p = x_p, \xi_\delta = x_{a+\delta}, \eta_p = x_{k+p},$$

$$N_p = \tilde{U}_p, P_\delta = \tilde{U}_{c+\delta}$$

уравнения (5) будут иметь вид

$$\dot{x} = Ax + B\tilde{U}, \quad (9)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ E_a & O & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} E_a & O \\ O & E_c \\ O & O \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{c_1} \end{pmatrix}, \tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \vdots \\ \tilde{U}_\kappa \end{pmatrix},$$

здесь  $E_a$  – единичная субматрица,  $c_1 = 2a + c$ .

Система (9) вполне управляема [16, 17], и для нее могут быть поставлены различные задачи теории управления. Имея в виду стабилизацию движения по отношению к многообразию, определяемому сервосвязями, можно искать принуждения вида [9, 10]

$$\tilde{U} = K_3 x,$$

где  $K_3$  – ненулевая матрица размерности  $(k \times c_1)$ , обеспечивающая стабилизацию тривиального решения  $x = 0$  системы

$$\dot{x} = (A + BK_3)x.$$

Пусть связи (1), (2) стационарны. Тогда кинетическая энергия системы будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (10)$$

или в скоростных параметрах  $e_v$  выражение кинетической энергии (10) преобразуется к виду

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \sum_{v=b+1}^n \sum_{v_1=b+1}^n \tilde{A}_{vv_1} e_v e_{v_1},$$

где  $\tilde{A}_{vv_1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot C_{jv_1} \cdot C_{vi}$ ,

и энергия ускорений  $S$  системы будет иметь вид [15]

$$S = \frac{1}{2} \sum_{v=b+1}^n \sum_{v_1=b+1}^n \tilde{A}_{vv_1} \cdot \dot{e}_v \dot{e}_{v_1} + \sum_{v=b+1}^n \sum_{v_1=b+1}^n \sum_{v_2=b+1}^n [v_1, v_2, v] \cdot e_{v_1} e_{v_2} e_v.$$

Уравнения (8) в явном виде будут иметь следующий вид [16]:

$$1) \sum_{p=1}^a A_{\alpha p} \ddot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c A_{\alpha, a+\delta} \dot{\xi}_\delta + \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} A_{\alpha, \kappa+\rho} \dot{e}_{\kappa+\rho} + \sum_{\alpha_1=1}^a \sum_{p=1}^a [\alpha_1, p, \alpha] \dot{\eta}_{\alpha_1} \dot{\eta}_p + \\ + \sum_{p=1}^a \sum_{\delta=1}^c [p, a+\delta, \alpha] \dot{\eta}_p \dot{\xi}_\delta + \sum_{p=1}^a \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa+\rho_1, \alpha] \dot{\eta}_p e_{\kappa+\rho_1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\delta=1}^c \sum_{\gamma=1}^c [a + \gamma, a + \delta, \alpha] \cdot \xi_{\delta} \xi_{\gamma} + \sum_{\delta=1}^c \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} [a + \delta, \kappa + \rho, \alpha] \xi_{\delta} e_{\kappa+\rho} + \\
& + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} [\kappa + \rho_1, \kappa + \rho, \alpha] e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho} = Q_{\alpha} + \sum_{\theta_2=1}^{\kappa} \lambda_{\theta_2} \tilde{a}_{\theta_2, \alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, a); \\
2) \quad & \sum_{p=1}^a A_{\alpha+\delta, p} \ddot{\eta}_p + \sum_{\delta_1=1}^c A_{a+\delta, a+\delta_1} \dot{\xi}_{\delta_1} + \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} A_{a+\delta, \kappa+\rho} \dot{e}_{\kappa+\rho} + \\
& + \sum_{\alpha=1}^a \sum_{p=1}^a [\alpha, p, a + \delta] \dot{\eta}_{\alpha} \dot{\eta}_p + \sum_{\alpha=1}^a \sum_{\delta_1=1}^c [\alpha, a + \delta_1, a + \delta] \dot{\eta}_{\alpha} \xi_{\delta_1} + \\
& + \sum_{\gamma=1}^a \sum_{\delta_1=1}^c [a + \gamma, a + \delta_1, a + \delta] \xi_{\gamma} \xi_{\delta_1} + \sum_{\alpha=1}^a \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} [\alpha, \kappa + \rho, a + \delta] \cdot \dot{\eta}_{\alpha} e_{\kappa+\rho} + \\
& + \sum_{\gamma=1}^c \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} [a + \gamma, \kappa + \rho, a + \delta] \xi_{\gamma} e_{\kappa+\rho} + \\
& + \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [\kappa + \rho_1, \kappa + \rho, a + \delta] e_{\kappa+\rho} e_{\kappa+\rho_1} = \\
& = Q_{a+\delta} + \sum_{\theta_2=1}^{\kappa} \lambda_{\theta_2} \tilde{a}_{\theta_2, a+\delta} \quad (\delta = 1, \dots, c); \\
3) \quad & \sum_{p=1}^a A_{\kappa+\rho, p} \ddot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c A_{\kappa+\rho, a+\delta} \dot{\xi}_{\delta} + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1} \dot{e}_{\kappa+\rho_1} + \sum_{\alpha=1}^a \sum_{p=1}^a [p, \alpha, \kappa + \rho] \dot{\eta}_p \dot{\eta}_{\alpha} \\
& + \sum_{p=1}^a \sum_{\delta=1}^c [p, a + \delta, \kappa + \rho] \dot{\eta}_p \xi_{\delta} + \sum_{p=1}^a \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa + \rho_1, \kappa + \rho] \dot{\eta}_p e_{\kappa+\rho_1} + \\
& + \sum_{\delta=1}^c \sum_{\gamma=1}^c [a + \delta, a + \gamma, \kappa + \rho] \cdot \xi_{\delta} \xi_{\gamma} + \sum_{\delta=1}^c \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [a + \delta, \kappa + \rho_1, \kappa + \rho] \xi_{\delta} e_{\kappa+\rho_1} + \\
& + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa + \rho_2, \kappa + \rho_1, \kappa + \rho] e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} = \\
& = Q_{\kappa+\rho} + \sum_{\theta_2=1}^{\kappa} \lambda_{\theta_2} \tilde{a}_{\theta_2, \kappa+\rho} \quad (\rho = 1, \dots, n - \kappa - b). \quad (11)
\end{aligned}$$

Движение, выполняемое на многообразии, определяемом сервосвязями (1), примем за невозмущенное, а все другие движения, выполняемые на многообразии, определяемом уравнениями (3) – возмущенными.

Если в (11) реакции связей второго рода  $R_{\alpha}^{(2)}$ ,  $R_{a+\delta}^{(2)}$ ,  $R_{\kappa+\rho}^{(2)}$  формировать по законам

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha}^{(2)} &= \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho, \kappa+\rho_1, \alpha]^o e_{\kappa+\rho} e_{\kappa+\rho_1} - Q_{\alpha}^o - \\
 &\quad - \sum_{p=1}^a (\kappa'_{\alpha p} \dot{\eta}_p + \kappa''_{\alpha p} \eta_p) - \sum_{\delta=1}^c \kappa_{\alpha, a+\delta} \xi_{\delta} \quad (\alpha = 1, \dots, a); \\
 R_{\alpha+\delta}^{(2)} &= \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho, \kappa+\rho_1, a+\delta]^o - Q_{\alpha+\delta}^o - \\
 &\quad - \sum_{p=1}^a (\kappa'_{a+\delta, p} \cdot \eta_p + \kappa''_{a+\delta, p} \cdot \eta_p) - \sum_{\gamma=1}^a \kappa_{a+\delta, a+\gamma} \cdot \xi_{\gamma} \quad (\gamma = 1, \dots, c); \\
 R_{\alpha+\rho}^{(2)} &= \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho_1, \kappa+\rho_2, \kappa+\rho]^o \cdot e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} - Q_{\kappa+\rho}^o \quad (\rho = 1, \dots, n-\kappa-b),
 \end{aligned}$$

то система уравнений (11) приводится к виду:

$$\begin{aligned}
 1) \quad &\sum_{p=1}^a \left( A_{\alpha p}^o + \sum_{\alpha_1=1}^a A_{\alpha p}^{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} \right) \dot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c \left( A_{\alpha, a+\delta}^o + \sum_{\alpha_1=1}^a A_{\alpha, a+\delta}^{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} \right) \xi_{\delta} + \\
 &\quad + \sum_{p=1}^a \left( \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa+\rho_1, \alpha]^o e_{\kappa+\rho_1} \right) \dot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c \left( \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [a+\delta, \kappa+\rho_1, \alpha]^o \times \right. \\
 &\quad \times e_{\kappa+\rho_1} - Q_{\alpha}^{a+\delta} \left. \right) \xi_{\delta} + \sum_{p=1}^a \left( \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\alpha, \kappa+\rho_1}^p \cdot \dot{e}_{\kappa+\rho_1} + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho_1, \kappa+\rho_2, \alpha]^p \times \right. \\
 &\quad \times e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} - Q_{\alpha}^p \left. \right) \eta_p + X'_{\alpha} \left( \eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_{\delta}^2 \right) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, a); \\
 2) \quad &\sum_{\gamma=1}^c \left( A_{a+\delta, a+\gamma}^o + \sum_{p=1}^a A_{a+\delta, a+\gamma}^p \eta_p \right) \dot{\xi}_{\gamma} + \sum_{p=1}^a \left( A_{a+\delta, p}^o + \sum_{\alpha=1}^a A_{a+\delta, p}^{\alpha} \eta_{\alpha} \right) \dot{\eta}_p + \\
 &\quad + \sum_{\delta_1=1}^c \left( \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [a+\delta_1, \kappa+\rho_1, a+\delta]^o e_{\kappa+\rho_1} - Q_{a+\delta}^{a+\delta_1} \right) \xi_{\delta_1} + \sum_{p=1}^a \left( \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa+\rho_1, a+\delta]^o \times \right. \\
 &\quad \times e_{\kappa+\rho_1} \left. \right) \dot{\eta}_p + \sum_{p=1}^a \left( \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{a+\delta, a+\gamma}^p \cdot \dot{e}_{\kappa+\gamma} + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho_1, \kappa+\rho_2, a+\delta]^p \times \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} - Q_{a+\delta}^p \Big) \eta_p + X'_{a+\delta} \left( \eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_\delta^2 \right) = 0 \quad (\delta = 1, \dots, c); \\
3) \quad & \sum_{p=1}^c \left( A_{\kappa+\rho, p}^o + \sum_{\alpha=1}^a A_{\kappa+\rho, p}^p \eta_\alpha \right) \ddot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c \left( A_{\kappa+\rho, a+\delta}^o + \sum_{p=1}^a A_{\kappa+\rho, a+\delta}^\alpha \cdot \eta_\alpha \right) \dot{\xi}_\delta + \\
& + \sum_{p=1}^a \left\{ \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [p, \kappa+\rho_1, \kappa+\rho] e_{\kappa+\rho_1} \right\} \dot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c \left\{ \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} [a+\delta, \kappa+\rho_1, \kappa+\rho]^o \times \right. \\
& \times e_{\kappa+\rho_1} - Q_{\kappa+\rho_1}^{a+\delta} \Big\} \xi_\delta + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}^p \cdot \dot{e}_{\kappa+\rho_1} + \sum_{\rho=1}^a \left\{ A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}^p \dot{e}_{\kappa+\rho_1} - Q_{\kappa+\rho}^p + \right. \\
& \left. + \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-\kappa-b} [\kappa+\rho_1, \kappa+\rho_2, \kappa+\rho]^p \cdot e_{\kappa+\rho_1} e_{\kappa+\rho_2} \right\} \eta_p + \\
& + X'_\alpha \left( \eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_\delta^2 \right) = 0 \quad (\rho = 1, \dots, n-\kappa-b), \tag{12}
\end{aligned}$$

где  $X'_\alpha \left( \eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_\delta^2 \right)$ ,  $X'_{a+\delta} \left( \eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_\delta^2 \right)$ ,  $X'_{\kappa+\rho}$  – члены второго и более высоко-го порядка относительно  $\eta_p^2$ ,  $\dot{\eta}_p^2$ ,  $\xi_\delta^2$ .

Из последних  $n-\kappa-b$  уравнений системы (12), определив  $\dot{e}_{\kappa+\rho}$ , затем подставляя эти выражения в первую группу  $a$  уравнений и во вторую группу  $c$  уравнений системы (12), получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^a \tilde{A}_{\alpha p} \ddot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c \tilde{B}_{\alpha, a+\delta} \dot{\xi}_\delta + \sum_{p=1}^a \tilde{C}_{\alpha p} \dot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c D_{\alpha, a+\delta} \xi_\delta + \\
& + \sum_{p=1}^a \tilde{E}_{\alpha p} \eta_p + \tilde{X}_\alpha \left( \eta_p^2, \dot{\eta}_p^2, \xi_\delta^2 \right) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, a); \\
& \sum_{p=1}^a \tilde{A}_{\alpha+\delta, p} \ddot{\eta}_p + \sum_{\delta=1}^c \tilde{B}_{\alpha+\delta, a+\gamma} \dot{\xi}_\gamma + \sum_{p=1}^a \tilde{C}_{\alpha+\delta, p} \dot{\eta}_p + \sum_{\gamma=1}^c \tilde{D}_{\alpha+\delta, a+\gamma} \xi_\gamma + \\
& + \sum_{p=1}^a E_{\alpha+\delta, p} \eta_p + \tilde{X}_{\alpha+\delta} = 0 \quad (\delta = 1, \dots, c), \tag{13}
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{A}_{\alpha p} = \tilde{A}_{\alpha p}^o + \sum_{\alpha_1=1}^a A_{\alpha p}^{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} - \frac{1}{\left( A_{\kappa+\rho, \kappa+\rho_1}^o \right)^T} \sum_{\rho=1}^{n-\kappa-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-\kappa-b} A_{\alpha, \kappa+\rho}^o \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times A^{k+\rho, k+\rho_2} \left( A_{k+\rho_2, p}^o + \sum_{\alpha_1=1}^a A_{k+\rho_2, p}^{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} \right) - ; \\
 \tilde{B}_{\alpha, a+\delta} &= A_{\alpha, a+\delta}^o + \sum_{p=1}^a A_{\alpha, a+\delta}^p \eta_p - \frac{1}{\left| \left( A_{k+\rho, k+\rho_1}^o \right)^T \right|} \sum_{\rho_2=1}^{n-k-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-k-b} A_{\alpha, k+\rho}^o \times \\
 & \times A^{k+\rho, k+\rho_2} \left( A_{k+\rho_2, a+\delta}^o + \sum_{p=1}^a A_{k+\rho, a+\delta}^p \right) \eta_p ; \\
 \tilde{C}_{\alpha p} = \tilde{C}_{\alpha p} &= \sum_{\rho_1=1}^{n-k-b} [p, k+\rho_1, \alpha]^o \cdot e_{k+\rho} - \frac{1}{\left| \left( A_{k+\rho, k+\rho_1}^o \right)^T \right|} \sum_{\rho_2=1}^{n-k-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-k-b} A_{\alpha, k+\rho}^o \times \\
 & \times A^{k+\rho, k+\rho_2} \left( \sum_{\rho_1=1}^{n-k-b} [p, k+\rho_1, k+\rho_2] e_{k+\rho_1} \right) ; \\
 \tilde{D}_{\alpha, a+\delta} &= \sum_{\rho_1=1}^{n-k-b} [a+\delta, k+\rho_1, \alpha]^o \cdot e_{k+\rho_1} - Q_{\alpha}^{a+\delta} - \frac{1}{\left| \left( A_{k+\rho, k+\rho_1}^o \right)^T \right|} \times \\
 & \times \sum_{\rho_1=1}^{n-k-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-k-b} A_{\alpha, k+\rho} \cdot A^{k+\rho, k+\rho_2} \left( \sum_{\rho_3=1}^{n-k-b} [a+\delta, k+\rho_3, k+\rho_2]^o \cdot e_{k+\rho_3} - Q_{k+\rho_2}^{a+\delta} \right) ; \\
 E_{\alpha p} &= \sum_{\rho_1=1}^{n-k-b} A_{\alpha, k+\rho_1}^p \dot{e}_{k+\rho_1} + \sum_{\rho_1=1}^{n-k-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-k-b} [k+\rho_1, k+\rho_2, \alpha]^p \times \\
 & \times e_{k+\rho_1} e_{k+\rho_2} - Q_{\alpha}^p - \frac{1}{\left| \left( A_{k+\rho, k+\rho_1}^o \right)^T \right|} \sum_{\rho=1}^{n-k-b} \sum_{\rho_1=1}^{n-k-b} A_{\alpha, k+\rho}^o \times \\
 & \times A^{k+\rho, k+\rho_2} \left\{ \sum_{\rho_3=1}^{n-k-b} A_{k+\rho_1, k+\rho_3}^p \dot{e}_{k+\rho_3} - Q_{k+\rho_2}^p + \right. \\
 & \left. + \sum_{\rho_3=1}^{n-k-b} \sum_{\rho_4=1}^{n-k-b} [k+\rho_3, k+\rho_4, k+\rho]^p \cdot e_{k+\rho_3} e_{k+\rho_4} \right\} ; \\
 \tilde{A}_{a+\delta, p} &= A_{a+\delta, p}^o + \sum_{\alpha=1}^a A_{a+\delta, p}^{\alpha} \eta_{\alpha} - \frac{1}{\left| \left( A_{k+\rho, k+\rho_1}^o \right)^T \right|} \sum_{\rho=1}^{n-k-b} \sum_{\rho_2=1}^{n-k-b} A_{a+\delta, k+\rho}^o \times
 \end{aligned}$$

$$\times A^{K+\rho, K+\rho_2} \left( A_{K+\rho_2, p}^\rho + \sum_{\alpha=1}^a A_{K+\rho_2, p}^\alpha \eta_\alpha \right).$$

При обозначениях

$$\eta_p = x_p, \dot{\eta}_p = x_{a+p}, \xi_\delta = x_{a+\delta} \quad (p = 1, \dots, a), (\delta = 1, \dots, c)$$

уравнения (13) могут быть записаны в виде

$$\frac{dx_{i_2}}{dt} = P_{i_2,1}(t)x_1 + \dots + P_{i_2,n_2}(t)x_{n_2} + \varphi_{i_2}(t, x_1, \dots, x_{n_2}) \quad (i_2 = 1, \dots, n_2 = 2a + c), \quad (14)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} E_{\alpha p} & O & O \\ \hline \sum_{\alpha_1=1}^a \tilde{A}^{p\alpha_1} \tilde{C}_{\alpha_1\alpha} & \sum_{\delta_1=1}^c \tilde{A}^{p,\alpha+\delta_1} \tilde{D}_{a+\delta_1,\alpha} & \sum_{\alpha=1}^a \tilde{A}^{p,K+\alpha_1} E_{\alpha_1\alpha} \\ \hline \left| \begin{array}{cc} \tilde{A}_{\alpha p} & \tilde{B}_{\alpha,a+\delta} \\ \tilde{A}_{a+\delta,p} & \tilde{B}_{a+\delta_1,a+\delta} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \tilde{A}_{\alpha p} & \tilde{B}_{\alpha,a+\delta} \\ \tilde{A}_{a+\delta,p} & \tilde{B}_{a+\delta_1,a+\delta} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \tilde{A}_{\alpha p} & \tilde{B}_{\alpha,a+\delta} \\ \tilde{A}_{a+\delta,p} & \tilde{B}_{a+\delta_1,a+\delta} \end{array} \right| \\ \hline \sum_{\alpha_1=1}^a \tilde{A}^{a+\delta,\alpha} \tilde{C}_{\alpha p} & \sum_{\alpha_1=1}^c \tilde{A} & \sum_{\alpha_1=1}^a \tilde{A}^{a+\delta,a+\alpha} E_{\alpha,a+\gamma} \\ \hline \left| \begin{array}{cc} \tilde{A}_{\alpha p} & \tilde{B}_{\alpha,a+\delta} \\ \tilde{A}_{a+\delta,p} & \tilde{B}_{a+\delta_1,a+\delta} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \tilde{A}_{\alpha p} & \tilde{B}_{\alpha,a+\delta} \\ \tilde{A}_{a+\delta,p} & \tilde{B}_{a+\delta_1,a+\delta} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \tilde{A}_{\alpha p} & \tilde{B}_{\alpha,a+\delta} \\ \tilde{A}_{a+\delta,p} & \tilde{B}_{a+\delta_1,a+\delta} \end{array} \right| \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что уравнения (14) представляют собой систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Устойчивость этой системы по отношению к многообразию, определяемому сервосвязями (2) будем исследовать, используя методы исследований устойчивости неустановившихся систем [17].

Выберем вспомогательную систему уравнений

$$\frac{dx_{i_2}}{dt} = d_{i_2,1}x_1 + \dots + d_{i_2,n_2}x_{n_2} \quad (i_2 = 1, \dots, n_2 = 2a + c), \quad (15)$$

где коэффициенты  $d_{i_2,1}, \dots, d_{i_2,n_2}$  ( $i_2 = 1, \dots, n_2 = 2a + c$ ) выбираются постоянными числами [17]. При этом предполагается, что корни  $\lambda_{i_2}$  характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{12} & \dots & d_{1,n_2} \\ d_{21} & d_{22} - \lambda & \dots & d_{2,n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n_2,1} & d_{n_2,2} & \dots & d_{n_2,n_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

системы (15) удовлетворяют неравенству

$$Re\lambda_{i_1} < -\delta_1 \quad (\delta_1 > 0; i_1 = 1, \dots, 2a).$$

Когда вспомогательная система (15) выбрана, исследования проводим следующим образом. Задаем определенно отрицательную форму

$$w(x) = \sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{j_2=1}^{2a+c} C_{i_2 j_2} x_{i_2} x_{j_2}$$

и строим функцию

$$v(x) = \sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{j_2=1}^{2a+c} a_{i_2 j_2} x_{i_2} x_{j_2},$$

удовлетворяющую условиям

$$\left( \frac{dv}{dt} \right)_{15} = w(x).$$

Здесь  $\left( \frac{dv}{dt} \right)_{15}$  – полная производная по времени, вычисленная в силу (15), и коэффициенты  $a_{i_2 j_2}$  ( $i_2, j_2 = 1, \dots, n_2$ ) квадратичной формы

$v(x) = \sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{j_2=1}^{2a+c} a_{i_2 j_2} x_{i_2} x_{j_2}$  определяются решением системы уравнений

$$C_{i_2 j_2} = \sum_{\kappa_7=1}^{2a+c} (a_{i_2 \kappa_7} d_{\kappa_7 j_2} + a_{j_2 \kappa_7} d_{\kappa_7 i_2})$$

относительно  $a_{i_2 j_2}$  ( $i_2, j_2 = 1, \dots, n_2$ ). При этом предполагается, что последняя система уравнений разрешима относительно  $a_{i_2 j_2}$ , т.е. дефект матрицы

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1, n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n_2, 1} & d_{n_2, 2} & \dots & d_{n_2, n_2} \end{pmatrix} \quad (n_2 = 2a + c)$$

равен нулю.

Вычислим  $\left( \frac{dv}{dt} \right)_{14}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{dv}{dt} \right)_{14} &= w(x) + \sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{j_2=1}^{2a+c} \sum_{\kappa_7=1}^{2a+c} (a_{i_2 j_2} [p_{j_2 \kappa_7}(t) - d_{j_2 \kappa_7}] + \\ &+ a_{\kappa_7 j_2} [p_{j_2 i_2}(t) - d_{j_2 i_2}]) x_{i_2} x_{\kappa_7} + \sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{j_2=1}^{2a+c} a_{i_2 j_2} x_{j_2} \Phi_{i_2}(t, x). \end{aligned}$$

Очевидно [17], что любую функцию  $\varphi_{i_2}(t, x)$  можно представить в виде

$$\varphi_{i_2}(t, x) = \sum_{k_7=1}^{2a+c} h_{i_2 k_7}(t, x) \cdot x_{k_7}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\nu}{dt}\right)_{14} &= \sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{j_2=1}^{2a+c} \sum_{k_7=1}^{2a+c} \left( C_{i_2 k_7} + a_{i_2 j_2} [p_{j_2 k_7}(t) - d_{j_2 k_7}] + \right. \\ &+ a_{k_7 j_2} [p_{j_2 i_2}(t) - d_{j_2 i_2}] + a_{i_2 j_2} \cdot h_{j_2 k_7} + a_{k_7 j_2} \cdot h_{j_2 i_2} \left. \right) x_{i_2} x_{k_7}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для асимптотической устойчивости решения  $x = 0$  системы (16) достаточно, чтобы форма переменных  $\{x_{i_2}\}$  в правой части равенства (16) была определено отрицательной [18].

Как известно, условия определенной положительности квадратичной формы

$$\sum_{i_2=1}^{2a+c} \sum_{k_7=1}^{2a+c} l_{i_2 k_7} \cdot x_{i_2} x_{k_7} = -(d\nu/dt)$$

даются неравенствами Сильвестра [18]:

$$\Delta_{n_1} > 0, \Delta_{n_1-1} > 0, \dots, \Delta_1 > 0 \quad (n_1 = 2a). \quad (17)$$

Так как  $l_{i_2 k_7}$  являются переменными, то для определенной отрицательности  $(d\nu/dt)$ , вообще говоря, недостаточно условий (17). Неравенства Сильвестра должны выполняться равномерно по всем  $x_1, \dots, x_{n_2}$ , т.е. следует потребовать выполнения неравенств

$$\Delta_{n_2} > \gamma_2, \Delta_{n_2-1} > \gamma_2, \dots, \Delta_1 > \gamma_2 \quad (\gamma_2 > 0; n_2 = 2a + c). \quad (18)$$

Условия (17) и (18) выражают условия асимптотической устойчивости системы (14).

#### Список литературы

1. **Беген, А.** Теория гироскопических компасов / А. Беген. – М. : Наука, 1967. – 192 с.
2. **Appel, P.** Sur les une forme generale des equations de la dynamique (memorial des Sciences Mathematique, fascicule 1) / P. Appel. – Paris, 1925. – С. 1–50.
3. **Przeborsri, A.** Die allgemeinsten Gleichunden der Klassischen Dunamik / A. Przeborsri // Math., teitschift. – Т. 36. – № 2. – С. 184–194.
4. **Новоселов, В. С.** Применение нелинейных неголономных координат в аналитической механике / В. С. Новоселов // Уч. записки ЛГУ. – 1967. – № 217. – С. 50–83.
5. **Шульгин, М. Ф.** О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании / М. Ф. Шульгин // Научные труды Среднеазиатского государственного университета. – Вып. 4. – Ташкент, 1958. – 183 с.

6. **Румянцев, В. В.** О движении некоторых систем с неидеальными связями / В. В. Румянцев // Вестник МГУ. – 1961. – С. 61–66. – (Сер. Матем. Механ.).
7. **Румянцев, В. В.** О движении управляемых механических систем / В. В. Румянцев // Прикладная математика и механика. – 1976. – Т. 40. – Вып. 5. – С. 771–781.
8. **Киргетов, В. И.** О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями) / В. И. Киргетов // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31. – Вып. 3. – С. 433–446.
9. **Азизов, А. Г.** Об уравнениях динамики систем с сервосвязями / А. Г. Азизов // Научные труды ТашГУ. – Вып. 476. – Ташкент, 1975. – С. 67–75.
10. **Азизов, А. Г.** Прикладные задачи динамики управляемых систем : учебное пособие / А. Г. Азизов. – Ташкент, 1980. – С. 23.
11. **Нугманова, Ш. С.** Об уравнениях движения регулируемых систем / Ш. С. Нугманова // Труды Казанского авиационного института. – 1953. – Т. 27. – С. 26–35.
12. **Четаев, Н. Г.** О принципе Гаусса / Н. Г. Четаев // Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М. : АН СССР, 1962. – С. 311–316.
13. **Четаев, Н. Г.** О вынужденных движениях / Н. Г. Четаев // Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М. : АН СССР, 1962. – С. 329–334.
14. **Галиулин, А. С.** Построение систем программного движения / А. С. Галиулин, Р. Г. Мухарлямов, И. А. Мухаметзянов, В. Д. Фурасов. – М. : Наука, 1971. – 352 с.
15. **Лурье, А. И.** Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : Физматгиз, 1961. – 824 с.
16. **Тешаев, М. Х.** О конструировании реакций сервосвязей систем, стесненных кинематическими связями / М. Х. Тешаев // Проблемы механики. – 2005. – № 1. – С. 3–7.
17. **Красовский, Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н. Н. Красовский. – М. : Физматгиз, 1959. – 211 с.
18. **Меркин, Г. Д.** Введение в теорию устойчивости / Г. Д. Меркин. – М. : Наука, 1987. – 304 с.

---

***Тешаев Мухсин Худайбердиевич***  
доцент, кафедра высшей математики,  
Бухарский технологический институт  
пищевой и легкой промышленности  
(Республика Узбекистан, г. Бухара)  
E-mail: Teshayev\_Muhsin@rambler.ru

***Teshaev Mukhsin Khudayberdievich***  
Associate professor, sub-department  
of higher mathematics, Bukhara  
Technological University of Food and Light  
Industry (Republic of Uzbekistan, Bukhara)

---

УДК 531.31+62-50  
**Тешаев, М. Х.**

**К задаче стабилизации движений механических систем, стесненных геометрическими и кинематическими сервосвязями / М. Х. Тешаев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 27–38.**

## НОВЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТНОМНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ТИПА ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА<sup>1</sup>

*Аннотация.* Рассматриваются вопросы, связанные с асимптотическим поведением решений неавтономной дискретной системы третьего порядка типа Лотки – Вольтерра. Данная система описывает течение инфекционного заболевания в разнородной группе людей, состоящей из трех популяций. На основе новых методов теории предельных уравнений и предельных функций Ляпунова получены условия асимптотической устойчивости, которые являются условиями полного выздоровления всех популяций. Представленная методика позволяет исследовать асимптотическую устойчивость систем Лотки – Вольтерра любой конечной размерности. Рассмотрены дополнительные примеры, показывающие, что полученные на основе вырожденной функции Ляпунова условия асимптотической устойчивости являются не только достаточными, но и необходимыми с точки зрения классических условий устойчивости по линейному приближению.

*Ключевые слова:* неавтономная дискретная система типа Лотки – Вольтерра, предельные уравнения, асимптотическая устойчивость, развитие прямого метода Ляпунова.

*Abstract.* The problems connected with asymptotic behavior of solutions of nonautonomous third-order discrete system of Lotka – Volterra type are considered. This system describes the dynamics of infectious disease in a heterogeneous group which consists of three populations. On the basis of new methods of limiting equations theory and limiting Lyapunov functions the conditions of asymptotic stability are obtained which provide full convalescence of all populations. The presented approach allows one to carry out the investigation of asymptotic stability of Lotka-Volterra system with arbitrary number of populations. The additional examples are considered which show that asymptotic stability conditions obtained on the basis of degenerative Lyapunov function are not only sufficient, but also necessary from point of view of classical stability conditions by linear approximation.

*Keywords:* nonautonomous discrete system of Lotka – Volterra type, limiting equations, asymptotic stability, extension of direct Lyapunov method

### Введение

При математическом моделировании процессов различной природы дискретно-временными системами достаточно часто приходится учитывать зависимость процессов от времени. При этом анализ асимптотического поведения траекторий неавтономной системы в нелинейном случае представляет собой достаточно сложную, до конца не изученную проблему даже для систем с фиксированным конечным запаздыванием. В статье рассматриваются вопросы, связанные с применением нового класса теорем из работ [1–3] об асимптотическом поведении движений неавтономных дискретных систем. В этих работах проводится построение топологической динамики неавтоном-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 08-01-97010, 09-08-97004, 08-08-97033.

ной дискретной системы, отличное от ранее предложенного в литературе. При этом существование функции Ляпунова со знакопостоянной разностью позволяет более точно локализовать положительное предельное множество решения  $\Omega^+(n_0, x_0)$ . В ранее опубликованной работе [2] доказаны теоремы об устойчивости (асимптотической устойчивости) состояния  $x=0$  дискретной системы, когда существует определенно-положительная функция Ляпунова, имеющая знакопостоянную разность в силу рассматриваемой системы. Обобщение метода предельных уравнений, полученное в работах [1, 3], позволило развить и обобщить результаты об асимптотической устойчивости на случай знакопостоянной (неотрицательной) функции Ляпунова со знакопостоянной разностью. Данная работа иллюстрирует преимущества использования теорем из [1–3] на примере конкретной динамической системы.

### 1 Постановка задачи. Основные предположения

Рассмотрим дискретную динамическую модель третьего порядка, описывающую течение болезни в некоторой биологической системе. Даны три различные популяции, где инфицированные члены первой и второй популяций могут заражать друг друга, а инфицированные члены третьей популяции могут заражать членов всех трех популяций. Будем предполагать, что выздоровление возможно, но иммунитет отсутствует и популяции постоянны. Пусть  $x_i$  – инфицированная часть популяции  $P_i$ ,  $i=1, 2, 3$ . Тогда  $(1-x_i)$  – здоровая часть, которая воспринимает инфекцию (заметим, что можно рассматривать в качестве своеобразных «популяций» три группы компьютеров в сети, которые могут распространять постоянно видоизменяющийся компьютерный вирус).

При сделанных предположениях нелинейная дискретная модель течения болезни с учетом нестационарности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (a_1(n)x_2(n) + c_1(n)x_3(n))(1-x_1(n)) + b_1(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = (a_2(n)x_1(n) + c_2(n)x_3(n))(1-x_2(n)) + b_2(n)x_2(n), \\ x_3(n+1) = (a_3(n)x_3(n) + c_3(n)x_1(n) + c_4(n)x_2(n))(1-x_3(n)) + b_3(n)x_3(n), \end{cases} \quad (1)$$

где  $0 \leq a_i \leq 1, 0 \leq b_i \leq 1, 0 \leq c_i \leq 1$ .

Введем также дополнительные условия, обеспечивающие корректность поставленной задачи, а именно  $x_i(n) \in \Gamma = \{x : 0 \leq x_i \leq 1, i=1, 2, 3\}, \forall n \geq n_0, x(n_0) \in \Gamma$ :

$$\begin{cases} a_1(n) + c_1(n) \leq 1, \\ a_2(n) + c_2(n) \leq 1, \\ a_3(n) + c_3(n) + c_4(n) \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения, предельные к (1), имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (a_1^*(n)x_2(n) + c_1^*(n)x_3(n))(1-x_1(n)) + b_1^*(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = (a_2^*(n)x_1(n) + c_2^*(n)x_3(n))(1-x_2(n)) + b_2^*(n)x_2(n), \\ x_3(n+1) = (a_3^*(n)x_3(n) + c_3^*(n)x_1(n) + c_4^*(n)x_2(n))(1-x_3(n)) + b_3^*(n)x_3(n), \end{cases} \quad (3)$$



где функции  $a_i^*(n), b_i^*(n), c_i^*(n)$  являются предельными для  $a_i(n), b_i(n), c_i(n)$  соответственно для некоторой последовательности  $n_k \rightarrow +\infty$ , т.е.

$$a_i^*(n) = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} a_i(n + n_k), b_i^*(n) = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} b_i(n + n_k);$$

$$c_i^*(n) = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} c_i(n + n_k).$$

Допустим также, что функции, входящие систему (1), удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} fb_1(n) + ga_2(n) + hc_3(n) \leq f, \\ fa_1(n) + gb_2(n) + hc_4(n) \leq g, \\ fc_1(n) + gc_2(n) + ha_3(n) + hb_3(n) \leq h, \end{cases} \quad (4)$$

где  $f > 0, g > 0, h > 0$  – произвольные константы.

## 2 Развитие прямого метода Ляпунова и условия асимптотической устойчивости

Для исследования асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) рассмотрим функцию Ляпунова  $V = V(x_1, x_2, x_3) = fx_1 + gx_2 + hx_3$ . Так как все решения системы (1), стартующие из области  $\Gamma$ , остаются в ней, то при сделанных предположениях  $V(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ . Вычислим первую разность функции  $V$  в силу системы (1):

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(1)} &= fa_1x_2 + fc_1x_3 - fa_1x_1x_2 + fb_1x_1 + ga_2x_1 + gc_2x_3 - ga_2x_1x_2 - \\ &- gc_2x_2x_3 + gb_2x_2 + ha_3x_3 + hc_3x_1 + hc_4x_2 - ha_3x_3^2 - hc_3x_1x_3 - hc_4x_2x_3 + hb_3x_3 - \\ &- fx_1 - gx_2 - hx_3 = (fb_1 + ga_2 + hc_3 - f)x_1 + (fa_1 + gb_2 + hc_4 - g)x_2 + \\ &+ (fc_1 + gc_2 + ha_3 + hb_3 - h)x_3 - (fa_1 + ga_2)x_1x_2 - (fc_1 + hc_3)x_1x_3 - \\ &- (gc_2 + hc_4)x_2x_3 - ha_3x_3^2 \leq -ha_3(n)x_3^2 = -W(n, x_3) \leq 0. \end{aligned}$$

Предельная к  $W(n, x_3)$  функция имеет вид  $W^*(n, x_3) = ha_3^*(n)x_3^2$ . Следовательно, множество  $\{W^*(n, x) = 0\}$  представляет собой плоскость  $\{x_3 = 0\}$ , если  $a_3(n) \geq \varepsilon > 0$ . Но так как единственной квазиинвариантной точкой этого множества является точка  $x = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ , то по теореме об асимптотической устойчивости из [3] при выполнении условий (2) и (4) нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Проведем теперь дополнительный анализ полученных достаточных условий равномерной асимптотической устойчивости (4). Пусть  $u = \frac{f}{g} > 0$ ,

$v = \frac{h}{g} > 0$ , тогда система неравенств (4) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} v \leq \frac{1-b_2(n)}{c_4(n)} - \frac{a_1(n)}{c_4(n)}u, \\ v - \frac{c_2(n)}{a_3(n)+b_3(n)-1} - \frac{c_1(n)}{a_3(n)+b_3(n)-1}u, \\ v \leq -\frac{a_2(n)}{c_3(n)} - \frac{b_1(n)-1}{c_3(n)}u, \\ u > 0, v > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Используя графическое представление полученных неравенств в виде соответствующих полуплоскостей, получим условия существования непустой области пересечения трех полуплоскостей. В нашем случае знаки неизвестны только у коэффициентов  $-\frac{c_2(n)}{a_3(n)+b_3(n)-1}$  и  $-\frac{c_1(n)}{a_3(n)+b_3(n)-1}$ , где функция  $a_3(n)+b_3(n)-1$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Рассмотрим оба случая:

1.  $a_3(n)+b_3(n)-1 > 0$ . Этот случай не дает решения, так как полуплоскость, заданная неравенством  $v \leq -\frac{c_2(n)}{a_3(n)+b_3(n)-1} - \frac{c_1(n)}{a_3(n)+b_3(n)-1}u$ , не пересекает область  $\{u > 0, v > 0\}$ . Поэтому условия (5) здесь не выполняются.

2.  $a_3(n)+b_3(n)-1 < 0$ . Очевидно, что полуплоскости, заданные вторым и третьим соотношением из системы (5), пересекаются при условии  $\frac{1-b_1}{c_3} > \frac{c_1}{1-a_3-b_3}$ . При этом точка пересечения границ этих полуплоскостей равна

$$u^* = \frac{c_2c_3 + a_2(1-a_3-b_3)}{(1-b_1)(1-a_3-b_3) - c_1c_3} \text{ при условии } (1-b_1)(1-a_3-b_3) > c_1c_3.$$

Значение в точке  $u^*$  на границе полуплоскости, задаваемой первым неравенством системы (5), должно быть больше, чем на границе третьей полуплоскости в той же точке:

$$-\frac{a_1}{c_4}u^* + \frac{1-b_2}{c_4} \geq \frac{1-b_1}{c_3}u^* - \frac{a_2}{c_3}.$$

Преобразуя полученное неравенство, получаем, что система условий (5) эквивалентна следующим условиям:

$$\begin{cases} (c_2c_3 + a_2(1-a_3-b_3))(c_4(1-b_1) + a_1c_3) \leq \\ \leq (c_3(1-b_2) + a_2c_4)((1-b_1)(1-a_3-b_3) - c_1c_3), \\ (1-b_1)(1-a_3-b_3) > c_1c_3. \end{cases} \quad (6)$$

В соотношениях (6) опущена зависимость функций от дискретного времени  $n$  для сокращения записей.

### 3 Обсуждение результатов

Сравним полученное условие (6) в частном автономном случае с известными достаточными условиями асимптотической устойчивости и неустойчивости автономных нелинейных дискретных систем с выделенной линейной частью. Рассмотрим уравнение

$$x(n+1) = Ax(n) + R(n, x(n)). \quad (7)$$

**Теорема 1** [4]. Если нулевое решение линейного уравнения первого приближения  $x(n+1) = Ax(n)$  асимптотически устойчиво, т.е. спектральный радиус  $r(A) = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$ , причем  $\|R(n, x(n))\| \leq C \|x(n)\|^{1+\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , то решение  $x(n) \equiv 0$  уравнения (7) также асимптотически устойчиво. Если имеется собственное значение  $\lambda_i(A)$ , для которого  $|\lambda_i| > 1$ , то решение  $x(n) \equiv 0$  неустойчиво независимо от вида нелинейности  $R(n, x)$ .

Случаи, когда имеются собственные значения  $\lambda_i(A)$  с  $|\lambda_i| = 1$ , являются критическими. В этих случаях устойчивость нелинейной системы (7) зависит от вида нелинейности  $R(n, x)$ . Приведем еще одну теорему об устойчивости по первому приближению.

**Теорема 2** [5]. Рассмотрим систему  $x(n+1) = A(n)x(n) + f(n, x(n))$ , где  $f(n, 0) \equiv 0$ ,  $\|f(n, x)\| \leq \gamma \|x\|$ . Если нулевое решение линейной системы первого приближения  $x(n+1) = A(n)x(n)$  равномерно асимптотически устойчиво (а значит, экспоненциально устойчиво) и если  $\gamma$  достаточно мало, то нулевое решение нелинейной системы также экспоненциально устойчиво.

Применим теорему 1 к дискретной эпидемической модели (1), предполагая автономность системы. Тогда уравнение первого приближения имеет

вид  $x(n+1) = Ax(n)$ , где  $A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & c_4 & a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ . Собственные значения матрицы

$A$  являются корнями характеристического уравнения

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} -b_1 + \lambda & -a_1 & -c_1 \\ -a_2 & -b_2 + \lambda & -c_2 \\ -c_3 & -c_4 & -a_3 - b_3 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0,$$

где  $\alpha_0 = b_1 c_4 c_2 + (a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 + b_3) - a_1 c_2 c_3 - a_2 c_1 c_4 + b_2 c_1 c_3$ ,

$$\alpha_1 = (b_1 + b_2)(a_3 + b_3) + b_1 b_2 - c_2 c_4 - a_1 a_2 - c_1 c_3,$$

$$\alpha_2 = -(a_3 + b_1 + b_2 + b_3).$$

Заметим, что в нашем примере не выполняется необходимое условие устойчивости характеристического уравнения непрерывной линейной системы (теорема Стодолы), когда все коэффициенты характеристического полинома должны быть положительными (в противном случае он не является гурвицевым). Для дискретных систем требование принадлежности собственных значений единичному кругу комплексной плоскости (полиномы Шура) не на-

кладывает подобных ограничений. Так как проверка принадлежности корней многочлена левой полуплоскости представляется задачей гораздо более простой, то преобразуем характеристическое уравнение  $\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$ , используя конформное преобразование внутренности единичного круга в левую полуплоскость, предложенное в свое время Мизесом,  $\lambda = \frac{y+1}{y-1}$ . В результате получим новый многочлен, порядок которого остается прежним:  $\beta_0 + \beta_1y + \beta_2y^2 + \beta_3y^3 = 0$ . По теореме Мизеса  $|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} y_i < 0$ . В результате преобразования получены следующие коэффициенты:

$$\beta_0 = 1 - \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 = 3 + 3\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2;$$

$$\beta_2 = 3 - 3\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = 1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2.$$

По критерию Рауса-Гурвица многочлен  $P_3(y) = \beta_0 + \beta_1y + \beta_2y^2 + \beta_3y^3$  устойчив тогда и только тогда, когда положительны все главные диагональ-

ные миноры его матрицы Гурвица  $M = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_0 & 0 \\ \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \\ \beta_5 & \beta_4 & \beta_3 \end{pmatrix}$ . Известно [6], что для

систем третьего и четвертого порядков достаточно проверить положительность только одного, предпоследнего минора  $\Delta_{m-1}$ , при условии положительности коэффициентов многочлена. Следуя указанному критерию, получаем систему неравенств, определяющую условия асимптотической устойчивости для матрицы системы линейного приближения дискретной эпидемической модели:

$$\begin{cases} \beta_0 > 0, \\ \beta_1 > 0, \\ \beta_2 > 0, \\ \beta_3 > 0, \\ \beta_1\beta_2 - \beta_0\beta_3 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 > 0, \\ 3 + 3\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 > 0, \\ 3 - 3\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 > 0, \\ 1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 > 0, \\ 1 - \alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 - \alpha_0^2 > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Сравним условия (6), полученные нами с помощью функции Ляпунова, и алгебраически-корневые условия асимптотической устойчивости (8) в частном случае автономной системы. Так как непосредственное сравнение здесь вряд ли возможно, был проведен компьютерный эксперимент по методу Монте-Карло с генерацией значений 10000000 равномерно распределенных случайных векторных величин в  $[0,1]^{10} \subset R^{10}$  (так как в системе 10 параметров). Идеальное совпадение количества точек (60223 точки), удовлетворяющих условиям (6) и (8), показывает их полную эквивалентность в частном случае автономной системы, а также то, что выбранная функция Ляпунова при соблюдении условий теоремы о равномерной асимптотической устойчивости из [3] обеспечивает наилучшую (в общем случае) локализацию области равномерной асимптотической устойчивости. При этом нами доказана асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1), если собст-

венные значения линеаризованной системы попадают на границу единичного круга.

**Замечание 1.** Нулевое решение системы (1) (в автономном случае) не является единственной точкой равновесия. Есть и другие точки равновесия, к которым могут стремиться траектории системы (1). Для двумерной автономной дискретной эпидемической модели [7] формулы координат точки равновесия можно выписать в явном и достаточно компактном виде. Для трехмерного же случая, т.е. системы (1), такие формулы более чем громоздкие, поэтому не представляется возможным здесь выписать их в явном виде, вследствие чего приведем только систему уравнений, решения которой и являются формулами координат точек равновесия, отличных от точки  $(0,0,0)$ ,

$$\begin{cases} (b_1 - a_1x_2 - c_1x_3 - 1)x_1 + a_1x_2 + c_1x_3 = 0, \\ a_2x_1 + (b_2 - a_2x_1 - c_2x_3 - 1)x_2 + c_2x_3 = 0, \\ c_3x_1 + c_4x_2 + (b_3 - a_3x_3 - c_3x_1 - c_4x_2 - 1)x_3 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

**Замечание 2.** Для линейной неавтономной системы

$$x(n+1) = A(n)x(n) \quad (10)$$

нахождение конструктивных условий устойчивости является непростой задачей. Часто в технических приложениях используют так называемый метод «замороженных» коэффициентов: при каждом  $n \geq n_0$  находят все собственные значения  $\lambda_i(n)$  матрицы  $A(n)$ . Если они удовлетворяют условию  $|\lambda_i| \leq \alpha < 1$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $n_0 \leq n < +\infty$ , то считают, что система (10) асимптотически устойчива. Если же для некоторого  $s$  выполняется условие  $|\lambda_s(n)| \geq \alpha > 1$ , то система (10) неустойчива. Эти утверждения без дополнительных предположений неверны даже в случае периодических и почти периодических систем, что иллюстрируют следующие примеры.

**Пример 1.** Рассмотрим периодическую систему

$$\begin{cases} x(n+1) = \left( \frac{9}{8} + (-1)^n \frac{7}{8} \right) y(n), \\ y(n+1) = \left( \frac{9}{8} + (-1)^{n+1} \frac{7}{8} \right) x(n). \end{cases}$$

Собственные значения матрицы  $A(n)$ :  $\lambda_{1,2}(n) \equiv \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\forall n \in Z^+$ , лежат строго внутри единичного круга. Однако этого недостаточно даже для простой устойчивости нулевого решения. Если  $n_0 = 0$ , то фундаментальная матрица имеет вид

$$\Phi(n,0) = \begin{pmatrix} 2^{-2n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}, \text{ если } n = 2k - \text{четное};$$

$$\Phi(n,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 2^{-2n} & 0 \end{pmatrix}, \text{ если } n = 2k + 1 - \text{нечетное}.$$

В любом случае решение будет экспоненциально удаляться от начала координат.

**Пример 2.** Рассмотрим почти периодическую систему

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (\alpha + k \sin n)x_1(n) + (k \cos n)x_2(n), \\ x_2(n+1) = (k \cos n)x_1(n) + (\alpha - k \sin n)x_2(n). \end{cases}$$

Собственные значения матрицы  $A(n): \lambda_{1,2}(n) \equiv \{\alpha \pm k\}$ . При  $\alpha = 0,5$ ;  $k = 0,6$  имеем  $\lambda_1 = -0,1$ ;  $\lambda_2 = 1,1$ . То есть одно из собственных значений постоянно находится строго вне единичного круга. Однако нулевое решение будет асимптотически устойчиво. Траектория движения в этом случае имеет вид спирали.

### Заключение

Результаты и новый подход к анализу предельного поведения решений дискретных систем, полученные в статье, могут быть развиты при исследовании проблемы асимптотической устойчивости широкого класса дискретных неавтономных систем типа Лотки – Вольтерра произвольной размерности. Автором здесь показаны на достаточно сложном примере системы третьего порядка преимущества общих теорем из монографии [1] об асимптотической устойчивости неавтономных нелинейных дискретных систем с использованием знакоположительной функции Ляпунова с неположительной первой разностью.

### Список литературы

1. **Богданов, А. Ю.** Дискретные динамические системы: проблемы устойчивости и управления / А. Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 262 с.
2. **Богданов, А. Ю.** Метод предельных функций в теории устойчивости разностных уравнений / А. Ю. Богданов // Комбинаторные и вычислительные методы в математике : сборник научных трудов Сибирского отделения РАН. – Омск, 1999. – С. 82–94.
3. **Богданов, А. Ю.** Об устойчивости точки покоя дискретной системы / А. Ю. Богданов, С. В. Черников // Ученые записки УлГУ. – Ульяновск : УлГУ. – 2004. – Вып. 1 (14). – С. 99–115. – (Фундаментальные проблемы математики и механики).
4. **Афанасьев, В. Н.** Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М. : Высшая школа, 1989. – 447 с.
5. **Халанай, А.** Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – М. : Мир, 1971. – 309 с.
6. **Фельдбаум, А. А.** Методы теории автоматического управления / А. А. Фельдбаум, А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1971. – 744 с.
7. **LaSalle, J. P.** The stability of dynamical systems / J. P. LaSalle. – SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1976. – 76 p.

**Богданов Андрей Юрьевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра прикладной  
математики, Ульяновский  
государственный университет

E-mail: BogdanovAYu@ulsu.ru

**Bogdanov Andrey Yuryevich**

Candidate of physico-mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of applied mathematics,  
Ulyanovsk State University

---

УДК 517.929

**Богданов, А. Ю.**

**Новый подход к исследованию устойчивости неавтономных дискретных систем типа Лотки – Вольтерра / А. Ю. Богданов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 39–47.**

## СУБИЕРАРХИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПЛОСКИХ ЭКРАНАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

*Аннотация.* Рассмотрено решение интегрального уравнения, полученного из краевой задачи Коши для уравнения Гельмгольца. Представлен численный метод Галеркина. Получены численные результаты решения задачи в двух случаях при  $k \neq 0$  и  $k = 0$  с использованием субиерархического алгоритма на плоских экранах произвольной формы.

*Ключевые слова:* субиерархический алгоритм, интегральное уравнение, численный метод, краевая задача.

*Abstract.* The initial value problem for Helmholtz equation is considered. The issue results in an integral equation. The integral equation is solved by Galerkin method. Numerical results of solving of are obtained by using subhierarchical algorithm by plane screen of arbitrary shape in two case:  $k \neq 0$ ,  $k = 0$ .

*Keywords:* subhierarchical algorithm integral equations, numerical method, boundary value problem.

### Введение

Ряд задач математической физики приводит к решению интегральных уравнений вида

$$\iint_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) dy = f(x). \quad (1)$$

К подобным задачам относятся, например, задача дифракции электромагнитной или задача дифракции акустической волны на экранах плоской формы волн. Исследованием подобных задач занимался ряд авторов (Л. А. Вайнштейн, Г. А. Гринберг, Д. И. Воскресенский, Е. В. Захаров, А. С. Ильинский, Ю. В. Пименов, А. Б. Самохин, А. Г. Свешников, Ю. Г. Смирнов, Е. Е. Тыртышников). Рассматриваемая задача является актуальной в связи с широким применением результатов решения задачи в проектировании антенных решеток, полосковых антенн и печатных проводников. Исследование в этой области привели к активному и успешному применению численных методов для решения аналогичных задач дифракции. Однако большинство авторов ограничивались решением задачи на экранах базовой формы, например, на квадрате, прямоугольнике, треугольнике или круге. Представленный в статье метод позволяет решать подобные задачи на экранах произвольной формы, опираясь на результаты, полученные при решении задачи на экране базовой формы [1–4].

### Постановка задачи

Пусть  $\Omega$  – ограниченная плоская незамкнутая поверхность в  $R^3$  с границей  $\gamma$  ( $\Omega = \{x = (x_1, x_2, 0) \in R^3\}$ ). Будем искать функцию  $u \in H_{loc}^1(M_S)$ ,



что означает ограниченность энергии в любом конечном объеме пространства, удовлетворяющую на  $M_S = R^3 \setminus \bar{\Omega}$  следующей краевой задаче для уравнения Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2)u = 0 \quad u \in M_S, \quad \text{Im } k \geq 0, \quad (2)$$

с краевыми условиями на функцию (задача Дирихле)

$$u = g \quad u \in \Omega. \quad (3)$$

Для обеспечения единственности решения задачи необходимо, чтобы функция  $u$  удовлетворяла условию на бесконечности (условию Зоммерфельда):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} - iku &= o(r^{-1}) \quad k \neq 0; \\ u &= O(r^{-1}) \quad k = 0 \quad r = |x| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4)$$

Справедливы теоремы о единственности решения задачи Дирихле в предположении, что оно существует [5].

Представим рассматриваемое интегральное уравнение в операторном виде:

$$Lu = f, \quad (5)$$

где  $L$  является интегральным оператором

$$Lu = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) ds. \quad (6)$$

Введем пространство распределений Соболева. Положим для любого  $s \in R$ :

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \Big|_{\Omega} : u \in H^s(R^2) \right\}$$

и

$$\tilde{H}^s(\bar{\Omega}) = \left\{ u \Big|_{\Omega} : u \in H^s(R^2) : \text{supp } u \subset \bar{\Omega} \right\}.$$

Интегральный оператор  $L: \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega)$  [5, 6]. Данный оператор является эллиптическим, и для него справедливы теоремы о сходимости проекционного метода.

Отдельный интерес представляет уравнение (1), когда  $k \rightarrow 0$ , так называемый статический случай. В этом случае уравнение принимает вид

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} u(y) dy = f(x). \quad (7)$$

Для него также справедлива описанная выше теория.

### Метод Галеркина

Рассмотрим  $n$ -мерное пространство  $V_n$ . Проведем аппроксимацию элементов  $\psi$  элементами  $\psi_n \in V_n$ . Методом Галеркина находим  $\psi_n$  из системы уравнений

$$(L\psi_n, v) = (f, v). \quad (8)$$

Эти уравнения определяются конечномерным оператором  $L_n : V_n \rightarrow V'_n$ , где  $V'_n$  есть *антидуальное* пространство к  $V_n$ .

В качестве базисных функций  $\psi(x)$  выберем функции

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \Pi_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (9)$$

Данные функции удовлетворяют условию аппроксимации в  $\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$ .

Каждый элемент матрицы получается путем вычисления четырехкратного интеграла  $L_{i,j} = \int_{\Omega} G(x,y)\psi_i(x) \cdot v_j(y) ds$ , имеющего слабую особенность

в области интегрирования. Процедура избавления от особенности представлена в [1]. Правая часть матричного уравнения задается формулой

$$f_j = \int_{\Omega} f \psi_j ds. \text{ Здесь } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), \text{ а } G(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \text{ известная}$$

функция, а для случая  $k \rightarrow 0$   $G(x,y) = \frac{1}{|x-y|}$ . Решение СЛАУ осуществлялось методом сопряженных градиентов.

### Субиерархический алгоритм

Численное решение поставленной задачи для экрана прямоугольной формы строится с помощью метода Галеркина. Рассмотрим алгоритм построения решения для задачи дифракции на экранах произвольной формы. Будем предполагать, что решение задачи для экрана прямоугольной формы получено, и в нашем распоряжении находится базовая матрица, составленная при решении одним из проекционных методов. Для решения задачи дифракции на экране сложной формы необходимо, чтобы данная поверхность целиком принадлежала экрану прямоугольной формы, для которого матрица уже насчитана. Субиерархический метод позволяет построить матрицу для фигуры сложной формы с использованием элементов посчитанной матрицы, составленной при решении задачи на экране прямоугольной формы. Следует заметить, что метод работает, и в случае использования в качестве базового экран не только прямоугольной формы. В этом случае на экран сложной конфигурации налагается то же условие, что и раньше, он должен целиком принадлежать базовому экрану. В построенной фигуре введем новую нумерацию вершин. Скорость построения новой матрицы будет напрямую зависеть от размера экрана и количества вершин в сетке.

Произведя полный перебор вершин, получаем новую сетку. Эту сетку будем использовать для расчета поля на отверстии сложной формы. Таким образом, один раз решив задачу на экране базовой формы, мы можем использовать полученные результаты для решения серии задач на экранах сложной геометрической формы.

### Параллельный подход

Рассматриваемая задача требует составления матрицы как можно большего размера, что требует больших затрат времени. Для минимизирования временных затрат максимально упростим в решаемой задаче процессы, связанные с составлением матричного уравнения. Наиболее естественным подходом, упрощающим решение задач, является использование матричной симметрии. За счет этого время, потраченное на составление матрицы, можно сократить в два раза. Значительно сокращается время составления матрицы при использовании внутренней симметрии матричных элементов. Матрица, полученная по алгоритму метода Галеркина, является тривиальной. Субиерархический подход в подобных задачах позволяет избавиться от повторного счета матричных элементов и использовать элементы ранее рассчитанной матрицы. Еще один подход при минимизации временных затрат связан с использованием параллельных вычислений. В представленной задаче каждый элемент матрицы формируется независимо друг от друга, поэтому можно рассчитать элементы матрицы на нескольких процессорах или кластере.

### Результаты счета

В работе представлены результаты счета модулей решений интегральных уравнений (1) и (7) на экранах базовой формы и экранах сложной конфигурации. На графиках (рис. 1–4) форма экрана расположена в левой части рисунка. Экран базовой формы является квадратом размером  $16 \times 16$  носителей. Экран сложной формы отображен черным цветом. Правые части рисунков отображают модули решений интегрального уравнения (1) или (7).

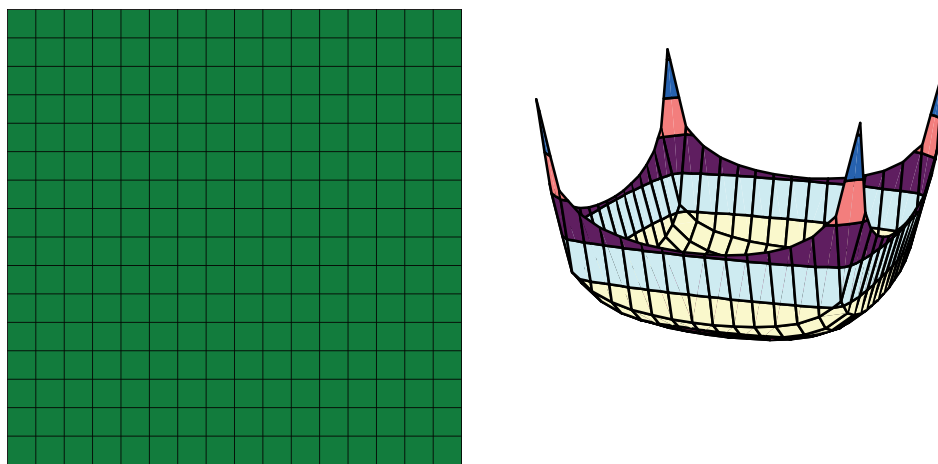


Рис. 1 Модули решения интегрального уравнения (7), рассчитанные на квадратном носителе, размер сетки  $16 \times 16$

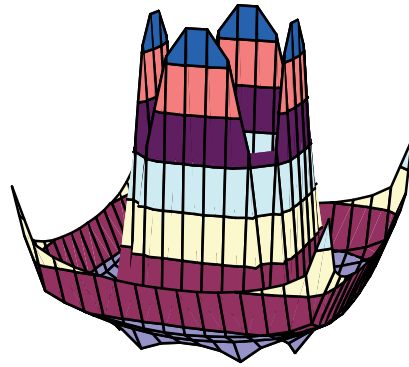
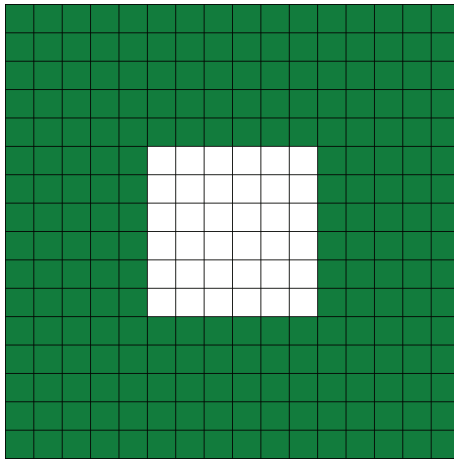


Рис. 2 Модули решения интегрального уравнения (7), рассчитанные на квадратном носителе с дыркой в форме квадрата, размер сетки  $16 \times 16$

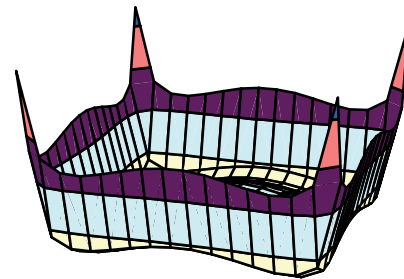
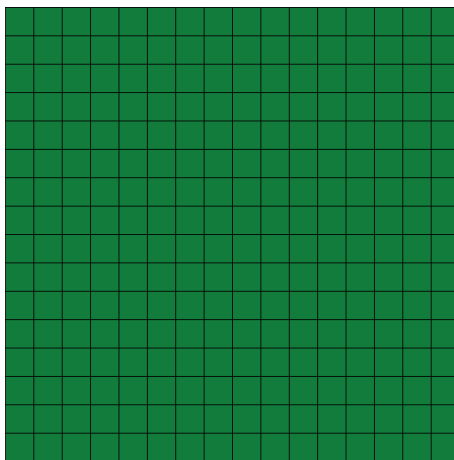


Рис. 3 Модули решения интегрального уравнения (1), рассчитанные на квадратном носителе, размер сетки  $16 \times 16$

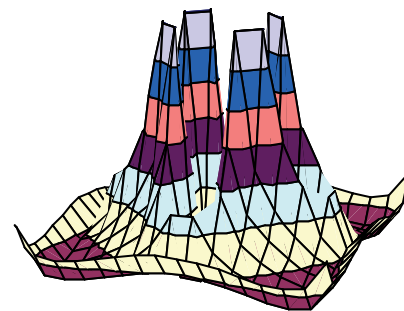
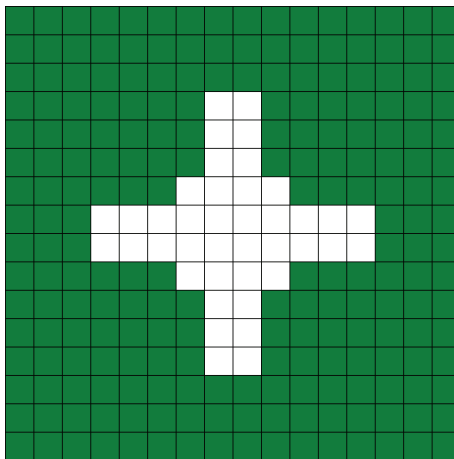


Рис. 4 Модули решения интегрального уравнения (1), рассчитанные на квадратном носителе с крестовым разрезом в центре, размер сетки  $16 \times 16$

**Список литературы**

1. **Медведик, М. Ю.** Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, С. И. Соболев // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 99–108.
2. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм и сходимость метода Галеркина в задачах дифракции электромагнитного поля на плоском экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2004. – № 5. – С. 3–19. – (Естественные науки).
3. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный метод для электромагнитной задачи дифракции в экранированных слоях, связанных через отверстие / М. Ю. Медведик, И. А. Родионова // Надежность и качество : труды международного симпозиума. – Пенза, 2006. – Т. 1. – С. 272–274.
4. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 6. – № 4. – С. 1–6.
5. **Stephan, E. P.** Boundary Integral Equation for Screen Problem in  $R^3$  / E. P. Stephan // Integral Equation and Operator Theory. – 1987. – V. 10. – P. 236–257.
6. **Päivärinta, L.** Corner singularities of solution to in two  $\Delta^{\pm 1/2}u = f$  dimensions / L. Päivärinta, S. Rempel // Asymptotic Analysis. – 1992. – V. 5. – P. 429–460.

---

**Медведик Михаил Юрьевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет

E-mail: \_medv@mail.ru

**Medvedik Mikhail Yuryevich**

Candidate of physico-mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University

---

УДК 517.6+517.958

**Медведик, М. Ю.**

**Субиерархический метод решения интегрального уравнения на плоских экранах произвольной формы** / М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 48–53.

## **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЪЕМНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИИ**

*Аннотация.* Рассмотрен численный метод коллокации для решения объемного сингулярного интегродифференциального уравнения на диэлектрическом теле, расположенном в прямоугольном волноводе. Также рассмотрена обратная задача определения эффективной диэлектрической проницаемости тела. Представлены расчетные формулы для матричных коэффициентов метода коллокации. Представлены результаты численных расчетов для решения сингулярного интегродифференциального уравнения методом коллокации и численные результаты определения эффективной диэлектрической проницаемости тела в волноводе.

*Ключевые слова:* обратная электромагнитная краевая задача, интегродифференциальное уравнение, метод коллокации.

*Abstract.* Numerical collocation method for solving singular integro-differential equation on dielectric body located in rectangular waveguide is considered. Inverse electromagnetic boundary value problem for determination of effective permittivity of the body is also considered. The formulas of matrix coefficients for collocation method are presented. Numerical results for solution of singular integro-differential equation by collocation method as well as numerical results for determination of effective permittivity of the body in waveguide are presented.

*Keywords:* inverse electromagnetic boundary value problem, electromagnetic scattering, integro-differential equation, collocation method.

Определение диэлектрических и магнитных параметров нанокomпозитных материалов и сложных наноструктур с различной геометрией является актуальной задачей нанотехнологии и наноэлектроники. Однако эти параметры, как правило, недоступны для экспериментального измерения (ввиду композитного характера материалов и малых размеров образцов), что приводит к необходимости применять методы математического моделирования и решать задачи численно с помощью компьютеров.

При этом приходится решать трехмерные векторные задачи в полной электродинамической постановке. Решение таких задач является в настоящее время одной из самых актуальных проблем в электродинамике. Решение этих задач с приемлемой для практики точностью на электродинамическом уровне строгости математическими методами требует очень большого объема вычислений и часто невозможно даже на самых современных суперкомпьютерах. Особенно остро стоит проблема решения обратных электродинамических задач на сложной системе тел в резонансном диапазоне частот, возникающая при определении параметров нанокomпозитных материалов и наноструктур [1–3].

Таким образом, возникает необходимость разработки новых методов решения указанного круга задач. Одним из перспективных методов является метод объемных сингулярных интегральных уравнений [4–6]. Краевая задача сводится к решению нелинейного объемного сингулярного интегродиффе-

ренциального уравнения [6–8]. Здесь оператор задачи получается эллиптическим, а интегральное уравнение решается только внутри тела (в области неоднородности).

На этом пути удается доказать теорему о существовании и единственности решений в  $L_2$  нелинейного интегрального уравнения, теорему о существовании и единственности решений обратной краевой задачи, предложить и доказать сходимость численного метода для решения интегрального уравнения и обратной краевой задачи [6–8].

Настоящая статья посвящена разработке численного метода для решения интегрального уравнения и обратной краевой задачи. Применяется метод коллокации [9] с аналитическим суммированием медленно сходящихся рядов в функциях Грина.

### Метод коллокации

Рассмотрим вопрос о построении схемы метода коллокации для решения объемного сингулярного интегродифференциального уравнения, к которому сводится краевая задача дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле  $Q$ , расположенном в прямоугольном волноводе [6–8]. Пусть в декартовой системе координат  $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$  – волновод с идеально проводящей поверхностью  $\partial P$ . В волноводе расположено объемное тело  $Q$  ( $Q \subset P$  – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_0$  и положительной  $3 \times 3$ -матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}(x)$ . Компоненты  $\hat{\epsilon}(x)$  являются ограниченными функциями в области  $\bar{Q}$ ,  $\hat{\epsilon} \in L_\infty(Q)$ , а также  $\hat{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$ .

Будем формулировать метод не для сингулярного интегрального уравнения, а для интегродифференциального уравнения. Этот подход оказывается эффективным в силу более удобного представления интегралов. Будем предполагать, что тензор диэлектрической проницаемости тела  $\hat{\epsilon}(x)$  удовлетворяет условиям:

$\left( \frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right)$  обратим в  $\bar{Q}$  и  $\left( \frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1} \in L_\infty(Q)$ , где  $\hat{I}$  – единичный тензор.

Введя обозначения

$$\xi = \left( \frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1}, \quad \mathbf{J} := \left( \frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E},$$

перейдем к следующему уравнению:

$$A\mathbf{J} = \xi\mathbf{J}(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y)\mathbf{J}(y)dy - \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y)\mathbf{J}(y)dy = \mathbf{E}^0(x), \quad (1)$$

где  $\vec{E}$  – неизвестное электрическое поле;  $\mathbf{E}^0$  – известное внешнее электрическое поле (распространяющаяся волна в волноводе);  $k_0$  – волновое число вакуума,  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ ;  $\omega$  – круговая частота.

Компоненты тензора Грина  $\widehat{G}_E(x, y)$  имеют вид [6]:

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2; \quad (2)$$

$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2; \quad (3)$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2. \quad (4)$$

В этих выражениях  $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$ , при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы  $\text{Im} \gamma_{nm} \geq 0$ .

Запишем  $G_E^m$  с выделенной особенностью при  $x = y$ :

$$G_E^m = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} + g^m(x, y), \quad x, y \in P, \quad (5)$$

где функция  $g^m \in C^\infty(\overline{Q} \times \overline{P})$  [10, с. 132]. Отсюда, и в силу симметрии функций Грина  $G_E^m(x, y) = G_E^m(y, x)$  ( $m = 1, 2, 3$ ) имеем

**Утверждение 1.2.** Тензор Грина  $\widehat{G}_E$  допускает представление

$$G_E = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} \widehat{I} + \widehat{g}(x, y), \quad x, y \in P, \quad (6)$$

где матрица-функция (тензор)  $\widehat{g} \in C^\infty(\overline{Q} \times \overline{P})$  и  $\widehat{g} \in C^\infty(\overline{P} \times \overline{Q})$ .

Такое представление функции Грина удобно для теоретического исследования задачи дифракции, но непригодно для численных расчетов, так как не содержит алгоритма вычисления  $\widehat{g}$ .

Представим это уравнение в виде системы трех скалярных уравнений:

$$\sum_{i=1}^3 \xi_{li} J^i(x) - k_0^2 \int_Q G(x, y) J^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_l} \text{div}_x \int_Q G(x, y) \vec{J}(y) dy = E^{0l}(x), \quad l = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Будем искать компоненты приближенного решения  $\vec{J}$  в виде

$$\vec{J}^1 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^1 f_k^1(x), \quad \vec{J}^2 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 f_k^2(x), \quad \vec{J}^3 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^3 f_k^3(x),$$

где  $f_k^i$  – базисные функции.



Ниже проводится построение функций  $f_k^i$ . Будем считать, что  $Q$  – параллелепипед:  $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$ . Разобьем тело  $Q$  на элементарные параллелепипеды (рис. 1):

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\};$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n}k, x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{n}l, x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n}m,$$

где  $k, l, m = 0, \dots, n-1$ .

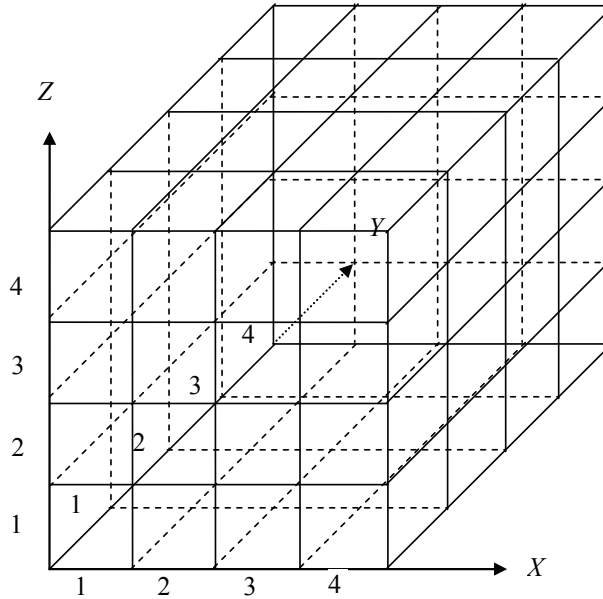


Рис. 1

Будем считать, что шаг по каждой координате постоянен:  $h^i := |x_{i,k} - x_{i,k-1}|$ . Наряду с обычной нумерацией нам удобно будет ввести трехиндексную нумерацию базисных функций. Определим  $f_{klm}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$f_{klm}^i = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Pi}_{klm}, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{klm}. \end{cases}$$

Построенное множество базисных функций удовлетворяет необходимому условию аппроксимации в  $L_2^3(Q) = L_2(Q) \times L_2(Q) \times L_2(Q)$ .

Расширенную матрицу для нахождения неизвестных коэффициентов  $\alpha_k^1, \alpha_k^2, \alpha_k^3$  удобно представить в блочной форме:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right).$$

Элементы столбцов  $B_k$  и матриц  $A_{kl}$  определяются из соотношений:

$$B_k^i = E_0^k(x_i);$$

$$A_{kl}^{ij} = \xi_{kl} f_i^l(x_j) - \delta_{kl} k_0^2 \int_Q G^k(x_j, y) f_i^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G^l(x_j, y) f_i^l(y) dy, \quad (8)$$

где координаты точек коллокации имеют следующий вид:

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}), \quad x_{i1} = (i_1 + 1/2)h_1, \quad x_{i2} = (i_2 + 1/2)h_2, \quad x_{i3} = (i_3 + 1/2)h_3,$$

$$k, l = 1, 2, 3; \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, представлены расчетные формулы для матричных коэффициентов метода коллокации для решения сингулярного интегродифференциального уравнения.

Пусть

$$X_1 = \frac{\pi x_1}{a}, \quad X_2 = \frac{\pi x_2}{b}, \quad Y_1 = \frac{\pi y_1}{a},$$

$$Y_2 = \frac{\pi y_2}{b}, \quad H_1 = \frac{\pi h_1}{a}, \quad H_2 = \frac{\pi h_2}{b},$$

тогда компоненты тензора Грина примут вид

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos nX_1 \sin mX_2 \cos nY_1 \sin mY_2; \quad (9)$$

$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin nX_1 \cos mX_2 \sin nY_1 \cos mY_2; \quad (10)$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin nX_1 \sin mX_2 \sin nY_1 \sin mY_2. \quad (11)$$

Введем обозначения для используемых функций:

$$r(x, y; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos ny}{n(n^2 + \lambda^2)} = p(x, y; \lambda) + q(x, y; \lambda) \quad (0 \leq x, y \leq \pi);$$

$$p(x, y; \lambda) = \frac{\pi}{4\lambda^2(1 - e^{-2\pi\lambda})} \times$$

$$\times \left( e^{-\lambda(2\pi-x-y)} - e^{-\lambda(x+y)} + \text{sign}(x-y)(e^{-\lambda(2\pi-|x-y|)} - e^{-\lambda|x-y|}) \right);$$

$$q(x, y; \lambda) = \frac{1}{4\lambda^2} (\pi - x - y + \text{sign}(x-y)(\pi - |x-y|));$$

$$q_0(x, y) = \pi - x - y + \text{sign}(x-y)(\pi - |x-y|);$$

$$s(x, y; \lambda) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2 + \lambda^2} = \frac{\pi}{4\lambda} \frac{e^{-\lambda|x-y|} + e^{-\lambda(2\pi-|x-y|)} - e^{-\lambda(x+y)} - e^{-\lambda(2\pi-x-y)}}{1 - e^{-2\pi\lambda}}$$

( $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi$ );

$$d(x, y; \lambda) \equiv \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\pi}{4} \frac{\left( e^{-\lambda|x-y|} - e^{-\lambda(2\pi-|x-y|)} \right) \text{sign}(x-y) - e^{-\lambda(x+y)} + e^{-\lambda(2\pi-x-y)}}{1 - e^{-2\pi\lambda}}$$

( $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi$ ).

Так как базисные функции равны 1 только внутри элементарного параллелепипеда  $\Pi_{klm}$ , интегралы в интегральном уравнении вычисляются аналитически. Проинтегрировав компоненты тензора Грина по элементарному параллелепипеду, будем иметь:

$$G_I^1 = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{\gamma_{nm}^2} \cos nX_1 \sin mX_2 (\sin n(i_1 + 1)H_1 - \sin ni_1H_1) (\cos mi_2H_2 - \cos m(i_2 + 1)H_2) + \frac{H_1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{0m}^0(x_3)}{\gamma_{0m}^2} \sin mX_2 (\cos mi_2H_2 - \cos m(i_2 + 1)H_2);$$

$$G_I^2 = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{\gamma_{nm}^2} \sin nX_1 \cos mX_2 (\cos ni_1H_1 - \cos n(i_1 + 1)H_1) \times$$

$$\times (\sin m(i_2 + 1)H_2 - \sin mi_2H_2) + \frac{H_2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n0}^0(x_3)}{\gamma_{n0}^2} \sin nX_1 (\cos ni_1H_1 - \cos n(i_1 + 1)H_1);$$

$$G_I^3 = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{\gamma_{nm}^2} \sin nX_1 \sin mX_2 \times$$

$$\times (\cos ni_1H_1 - \cos n(i_1 + 1)H_1) (\cos mi_2H_2 - \cos m(i_2 + 1)H_2),$$

где

$$f_{nm}^0(x_3) = \begin{cases} \left( \exp(-(x_3 - (i_3 + 1)h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-(x_3 - i_3h_3)\gamma_{nm}) \right), & \text{если } x_3 > (i_3 + 1)h_3; \\ \left( \exp(-(i_3h_3 - x_3)\gamma_{nm}) - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) \right), & \text{если } x_3 < i_3h_3; \\ \left( 2 - \exp(-(x_3 - i_3h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) \right), & \text{если } i_3h_3 < x_3 < (i_3 + 1)h_3. \end{cases}$$

После суммирования медленно сходящихся рядов (выделения особенности) получим:

$$\begin{aligned}
 G_I^1 = & \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(x_3)}{nm\gamma_{nm}^2} \cos nX_1 \sin mX_2 \cos ni_1^* H_1 \sin mi_2^* H_2 \sin \frac{nH_1}{2} \sin \frac{mH_2}{2} + \\
 & + \frac{2H_1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(x_3)}{\gamma_{0m}^2 m} \sin mX_2 \sin mi_2^* H_2 \sin \frac{mH_2}{2} + \\
 & + \chi_{i_3}(x_3) \left\{ \frac{8b^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nX_1 \cos ni_1^* H_1 \sin \frac{nH_1}{2} [p(X_2, i_2 H_2, \lambda_n) - \right. \\
 & - p(X_2, (i_2 + 1)H_2, \lambda_n)] [p(X_2, i_2 H_2, \lambda_n) - p(X_2, (i_2 + 1)H_2, \lambda_n)] + \\
 & + \frac{a^2}{\pi^4} [q_0(X_2, i_2 H_2) - q_0(X_2, (i_2 + 1)H_2)] \left[ p\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* - X_1, \frac{ika}{\pi}\right) + \right. \\
 & + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* - X_1, \frac{ika}{\pi}\right) + p\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* + X_1, \frac{ika}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* + X_1, \frac{ika}{\pi}\right) \left. \right] + \\
 & + \frac{2H_1 b^2}{\pi^4} \left[ p\left(X_2, i_2 H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) - p\left(X_2, (i_2 + 1)H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) + \right. \\
 & \left. + q\left(X_2, i_2 H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) - q\left(X_2, (i_2 + 1)H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) \right] \left. \right\}; \\
 G_I^2 = & \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(x_3)}{nm\gamma_{nm}^2} \cos mX_2 \sin nX_1 \cos mi_2^* H_2 \sin ni_1^* H_1 \sin \frac{mH_2}{2} \sin \frac{nH_1}{2} + \\
 & + \frac{2H_2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(x_3)}{\gamma_{n0}^2 n} \sin nX_1 \sin ni_1^* H_1 \sin \frac{nH_1}{2} + \\
 & + \chi_{i_3}(x_3) \left\{ \frac{8a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos mX_2 \cos mi_2^* H_2 \sin \frac{mH_2}{2} [p(X_1, i_1 H_1, \lambda_m) - \right. \\
 & - p(X_1, (i_1 + 1)H_1, \lambda_m)] + \frac{b^2}{\pi^4} [q_0(X_1, i_1 H_1) - q_0(X_1, (i_1 + 1)H_1)] \times \\
 & \times \left[ p\left(\frac{H_2}{2}, H_2 i_2^* - X_2, \frac{ikb}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_2}{2}, H_2 i_2^* - X_2, \frac{ikb}{\pi}\right) + p\left(\frac{H_2}{2}, H_2 i_2^* + X_2, \frac{ikb}{\pi}\right) + \right. \\
 & \left. + q\left(\frac{H_2}{2}, H_2 i_2^* + X_2, \frac{ikb}{\pi}\right) \right] + \frac{2H_2 a^2}{\pi^4} \left[ p\left(X_1, i_1 H_1, \frac{ika}{\pi}\right) - \right. \\
 & \left. - p\left(X_1, (i_1 + 1)H_1, \frac{ika}{\pi}\right) + q\left(X_1, i_1 H_1, \frac{ika}{\pi}\right) - q\left(X_1, (i_1 + 1)H_1, \frac{ika}{\pi}\right) \right] \left. \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_I^3 = & \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(x_3)}{nm\gamma_{nm}^2} \sin nX_1 \sin mX_2 \sin ni_1^* H_1 \sin mi_2^* H_2 \sin \frac{nH_1}{2} \sin \frac{mH_2}{2} + \\
& + \chi_{i_3}(x_3) \left\{ \frac{8b^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nX_1 \sin ni_1^* H_1 \sin \frac{nH_1}{2} [p(X_2, i_2 H_2, \lambda_n) - \right. \\
& - p(X_2, (i_2 + 1)H_2, \lambda_n)] + \frac{a^2}{\pi^4} [q_0(X_2, i_2 H_2) - q_0(X_2, (i_2 + 1)H_2)] \times \\
& \times \left[ p\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* - X_1, \frac{ika}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* - X_1, \frac{ika}{\pi}\right) + \right. \\
& \left. + p\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* + X_1, \frac{ika}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* + X_1, \frac{ika}{\pi}\right) \right] \Big\},
\end{aligned}$$

где

$$f_{nm}(x_3) = \begin{cases} \left( \exp(-(x_3 - (i_3 + 1)h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-(x_3 - i_3 h_3)\gamma_{nm}) \right), & \text{если } x_3 > (i_3 + 1)h_3; \\ \left( \exp(-(i_3 h_3 - x_3)\gamma_{nm}) - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) \right), & \text{если } x_3 < i_3 h_3; \\ \left( -\exp(-(x_3 - i_3 h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) \right), & \text{если } i_3 h_3 < x_3 < (i_3 + 1)h_3. \end{cases}$$

Здесь также обозначено

$$i_1^* = i_1 + 0,5, \quad i_2^* = i_2 + 0,5, \quad i_3^* = i_3 + 0,5, \quad j_1^* = j_1 + 0,5, \quad j_2^* = j_2 + 0,5, \quad j_3^* = j_3 + 0,5;$$

$$\chi_{i_3}(x_3) = \begin{cases} 1, & h_3 i_3 < x_3 < h_3 (i_3 + 1), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В точке коллокации значения проинтегрированных компонент тензора Грина будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
G_*^1 = & \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(h_3 j_3^*)}{nm\gamma_{nm}^2} \cos nj_1^* H_1 \sin mj_2^* H_2 \cos ni_1^* H_1 \sin mi_2^* H_2 \times \\
& \times \sin \frac{nH_1}{2} \sin \frac{mH_2}{2} + \frac{2H_1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(h_3 j_3^*)}{\gamma_{0m}^2 m} \sin mj_2^* H_2 \sin mi_2^* H_2 \sin \frac{mH_2}{2} + \\
& + \delta_{i_3 j_3} \left\{ \frac{8b^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nj_1^* H_1 \cos ni_1^* H_1 \sin \frac{nH_1}{2} [p(j_2^* H_2, i_2 H_2, \lambda_n) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -p\left(j_2^*H_2, (i_2+1)H_2, \lambda_n\right) + \frac{a^2}{\pi^4} \left[ q_0(j_2^*H_2, i_2H_2) - q_0\left(j_2^*H_2, (i_2+1)H_2\right) \right] \times \\
 & \quad \times \left[ p\left(\frac{H_1}{2}, H_1i_1^* - H_1j_1^*, \frac{ika}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1i_1^* - H_1j_1^*, \frac{ika}{\pi}\right) + \right. \\
 & \quad + p\left(\frac{H_1}{2}, H_1i_1^* + H_1j_1^*, \frac{ika}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1i_1^* + H_1j_1^*, \frac{ika}{\pi}\right) \left. \right] + \\
 & \quad + \frac{2H_1b^2}{\pi^4} \left[ p\left(j_2^*H_2, i_2H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) - p\left(j_2^*H_2, (i_2+1)H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) + \right. \\
 & \quad \left. + q\left(j_2^*H_2, i_2H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) - q\left(j_2^*H_2, (i_2+1)H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) \right] \Bigg\}; \\
 G_*^2 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(h_3j_3^*)}{nm\gamma_{nm}^2} \cos mj_2^*H_2 \sin nj_1^*H_1 \cos mi_2^*H_2 \sin ni_1^*H_1 \times \\
 & \quad \times \sin \frac{mH_2}{2} \sin \frac{nH_1}{2} + \frac{2H_2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(h_3j_3^*)}{\gamma_{n0}^2 n} \sin nj_1^*H_1 \sin ni_1^*H_1 \sin \frac{nH_1}{2} + \\
 & \quad + \delta_{i_3j_3} \left\{ \frac{8a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos mj_2^*H_2 \cos mi_2^*H_2 \sin \frac{mH_2}{2} \left[ p\left(j_1^*H_1, i_1H_1, \lambda_m\right) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - p\left(j_1^*H_1, (i_1+1)H_1, \lambda_m\right) \right] + \frac{b^2}{\pi^4} \left[ q_0\left(j_1^*H_1, i_1H_1\right) - q_0\left(j_1^*H_1, (i_1+1)H_1\right) \right] \times \right. \\
 & \quad \times \left[ p\left(\frac{H_2}{2}, H_2i_2^* - H_2j_2^*, \frac{ikb}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_2}{2}, H_2i_2^* - H_2j_2^*, \frac{ikb}{\pi}\right) + \right. \\
 & \quad + p\left(\frac{H_2}{2}, H_2i_2^* + H_2j_2^*, \frac{ikb}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_2}{2}, H_2i_2^* + H_2j_2^*, \frac{ikb}{\pi}\right) \left. \right] + \\
 & \quad + \frac{2H_2a^2}{\pi^4} \left[ p\left(j_1^*H_1, i_1H_1, \frac{ika}{\pi}\right) - p\left(j_1^*H_1, (i_1+1)H_1, \frac{ika}{\pi}\right) + \right. \\
 & \quad \left. + q\left(j_1^*H_1, i_1H_1, \frac{ika}{\pi}\right) - q\left(j_1^*H_1, (i_1+1)H_1, \frac{ika}{\pi}\right) \right] \Bigg\}; \\
 G_*^3 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(h_3j_3^*)}{nm\gamma_{nm}^2} \sin nj_1^*H_1 \sin mj_2^*H_2 \sin ni_1^*H_1 \sin mi_2^*H_2 \times \\
 & \quad \times \sin \frac{nH_1}{2} \sin \frac{mH_2}{2} + \delta_{i_3j_3} \left\{ \frac{8b^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nj_1^*H_1 \sin ni_1^*H_1 \sin \frac{nH_1}{2} \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ p(j_2^* H_2, i_2 H_2, \lambda_n) - p(j_2^* H_2, (i_2 + 1) H_2, \lambda_n) \right] + \\ & + \frac{a^2}{\pi^4} \left[ q_0(j_2^* H_2, i_2 H_2) - q_0(j_2^* H_2, (i_2 + 1) H_2) \right] \times \\ & \times \left[ p\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* - H_1 j_1^*, \frac{i k a}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* - H_1 j_1^*, \frac{i k a}{\pi}\right) + \right. \\ & \left. + p\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* + H_1 j_1^*, \frac{i k a}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* + H_1 j_1^*, \frac{i k a}{\pi}\right) \right] \}. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_{i_3 j_3}$  – символ Кронекера.

Для вторых производных в точке коллокации имеем:

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= -\frac{8}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n f_{nm}(h_3 j_3^*)}{m \gamma_{nm}^2} \cos n j_1^* H_1 \cos n i_1^* H_1 \sin \frac{n H_1}{2} \sin m i_2^* H_2 \times \\ & \times \sin m j_2^* H_2 \sin \frac{m H_2}{2} - \delta_{i_3 j_3} \frac{8 a}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin m i_2^* H_2 \sin m j_2^* H_2 \sin \frac{m H_2}{2} \times \\ & \times \left[ d(H_1 j_1^*, H_1(i_1 + 1); \lambda_m) - d(H_1 j_1^*, H_1 i_1; \lambda_m) \right]; \\ G_{22}^2 &= -\frac{8}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m f_{nm}(h_3 j_3^*)}{n \gamma_{nm}^2} \cos m j_2^* H_2 \cos m i_2^* H_2 \sin \frac{m H_1}{2} \sin n i_1^* H_1 \times \\ & - \delta_{i_3 j_3} \frac{8 b}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n i_1^* H_1 \sin n j_1^* H_1 \sin \frac{n H_1}{2} \times \\ & \times \left[ d(H_2 j_2^*, H_2(i_2 + 1); \lambda_n) - d(H_2 j_2^*, H_2 i_2; \lambda_n) \right]; \\ G_{12}^1 &= -\frac{8}{a b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(h_3 j_3^*)}{\gamma_{nm}^2} \sin n j_1^* H_1 \cos n i_1^* H_1 \sin \frac{n H_1}{2} \sin m i_2^* H_2 \times \\ & \times \cos m j_2^* H_2 \sin \frac{m H_2}{2} - \delta_{i_3 j_3} \frac{8 a}{\pi^2 b} \sum_{m=1}^{\infty} \sin m i_2^* H_2 \cos m j_2^* H_2 \sin \frac{m H_2}{2} \times \\ & \times \left[ s(H_1 j_1^*, H_1(i_1 + 1); \lambda_m) - s(H_1 j_1^*, H_1 i_1; \lambda_m) \right]; \\ G_{21}^2(i_1, i_2, j_1, j_2) &= G_{12}^1(j_1, j_2, i_1, i_2). \end{aligned}$$

Функции  $d(x, y; \lambda)$  и  $s(x, y; \lambda)$  были определены выше. После суммирования медленно сходящихся рядов получаем экспоненциально сходящиеся ряды.

### Результаты расчетов решения объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокации

На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов решения объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокации.

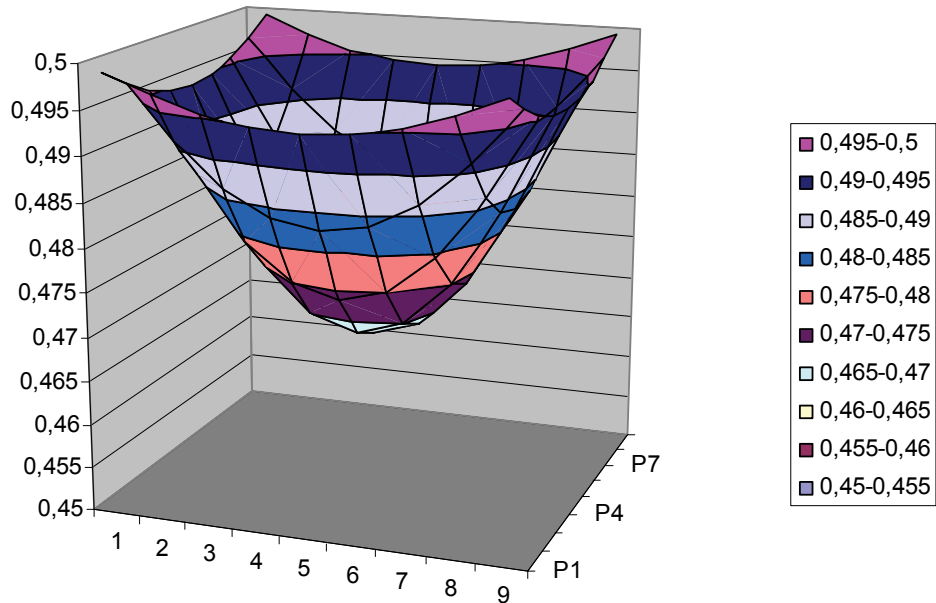


Рис. 1 Модуль компоненты  $|E_3|$  в сечении  $x_3 = 4,1$  (время на вычисление коэффициентов матрицы при  $m = 9$  : 2 ч 58 мин 56 с на 100 процессорах. Время на решение СЛАУ: 24 с на восьми процессорах)

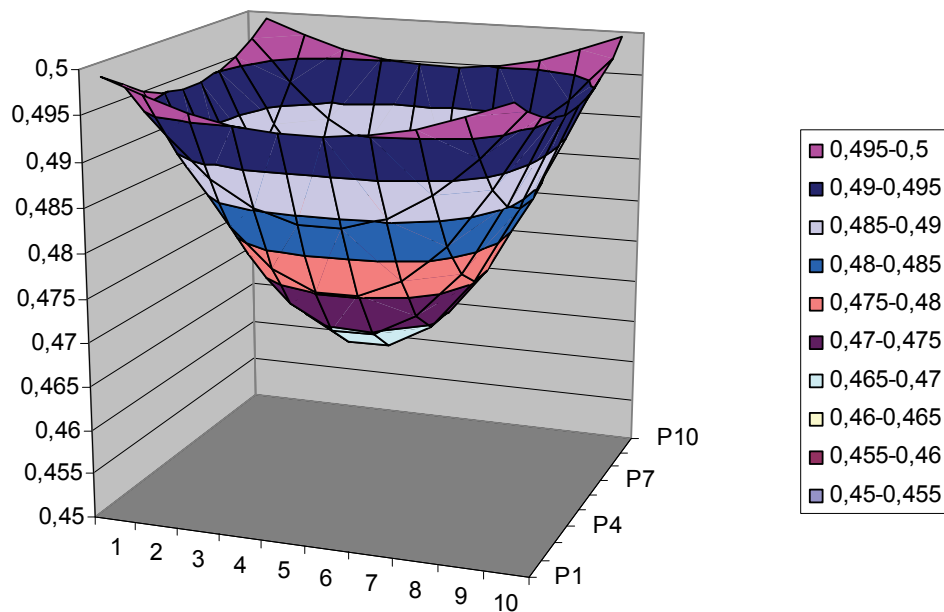


Рис. 2 Модуль компоненты  $|E_3|$  в сечении  $x_3 = 0,6$  (время на вычисление коэффициентов матрицы при  $m = 10$  : 5 ч 22 мин 32 с на 100 процессорах. Время на решение СЛАУ: 30 с на восьми процессорах)



Расчет проводился при значениях параметров:  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $c_2 = 1$ ,  $k_0 = 1$ . Суммировалось 500 членов во всех рядах. Выбиралось  $E^0(x) = (0, 0, 1)$ . Расчеты показывают высокую эффективность предложенного метода коллокации для решения объемного сингулярного интегрального уравнения и необходимость применения суперкомпьютеров. Расчеты выполнялись на суперкомпьютере СКИФ-ГРИД полигона Т-60 «Чебышев» в НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова.

### Результаты расчетов для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериала

Будем рассматривать обратную краевую задачу для определения эффективной диэлектрической проницаемости образца наноматериала, расположенного в волноводе. Рассмотрим изотропный случай и будем считать, что  $\bar{\varepsilon}(x) = \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – неизвестная константа (эффективная диэлектрическая проницаемость) образца. Предположим, что  $\pi/a < k_0 < \pi/b$ . В этом случае в волноводе может распространяться только одна мода, потому что  $\text{Im}\gamma_1^{(2)} = 0$ ,  $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/a^2} > 0$  и  $\text{Im}\gamma_p^{(j)} > 0$  для всех  $p, j$  за исключением  $p = 1$  и  $j = 2$ . Мы также предполагаем, что

$$\mathbf{E}^0(x) = e_2 A^{(+)} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3}.$$

Здесь  $A^{(+)}$  – (известная) амплитуда распространяющейся волны. Мы предполагаем, что коэффициент  $Q_1^{(+)}$  известен из эксперимента. Таким образом, имеем

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 = \frac{C}{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}, \quad (12)$$

где

$$C = \frac{i\pi\omega\mu_0 b\gamma_{10} (Q_1^{(+)} - A^{(+)})}{k_0^2}; \quad (13)$$

$$\mathbf{f} = e_2 \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} y_3}, \quad (14)$$

скобки обозначают скалярное произведение в пространстве  $L_2(Q)$ :

$$(\mathbf{E}, \mathbf{f}) = \int_Q \mathbf{E}(y) \overline{\mathbf{f}(y)} dy. \quad (15)$$

Расчет производим по итерационной формуле:

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n - \frac{1}{\tilde{A}^{(+)} \|\mathbf{f}\|^2} \{ (\mathbf{E}_n, \mathbf{f}) (\mathbf{E}_n - \mathbf{E}^0) - C (A_0 \mathbf{E}_n) \}. \quad (16)$$

В качестве начального приближения выбираем  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}^0$ . На рис. 3–6 представлены результаты расчетов эффективной диэлектрической проницаемости в зависимости от величины измеренного коэффициента прохождения для различных образцов, а также анализ сходимости итерационного процесса.

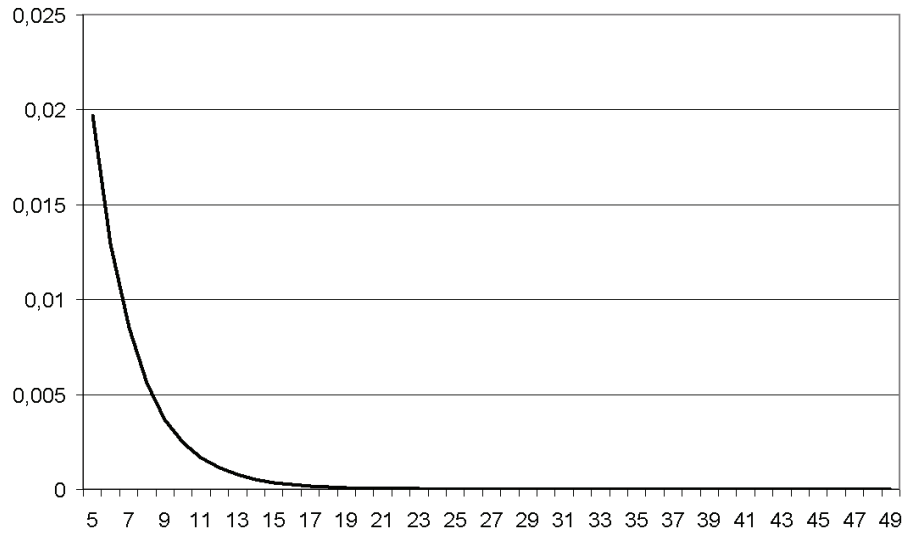


Рис. 3 Зависимость погрешности расчета электрического поля  $\Delta = \max|\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n|$  от количества итераций  $n$  в формуле (16) при значениях параметров:  $A^{(+)} = 1$ ,  $Q_1^{(+)} = 0,99$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$ ,  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $a_2 = 2$ ,  $b_2 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $k_0 = 2,5$

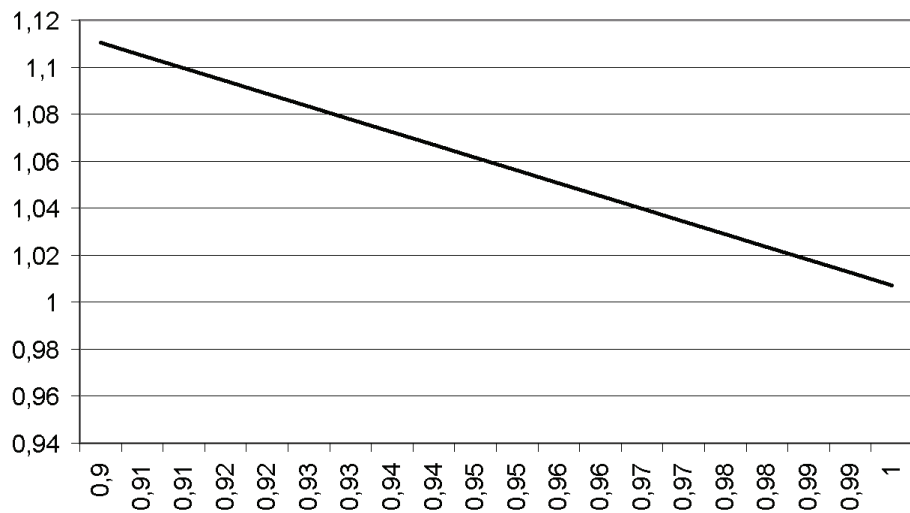


Рис. 4 Зависимость относительной эффективной диэлектрической проницаемости

$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  от величины измеренного коэффициента прохождения  $Q_1^{(+)}$

при значениях параметров:  $A^{(+)} = 1$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$ ,  $a_1 = 0$ ,  
 $b_1 = 0,25$ ,  $c_1 = 0,5$ ,  $a_2 = 1$ ,  $b_2 = 0,75$ ,  $c_2 = 1,5$ ,  $k_0 = 2,5$

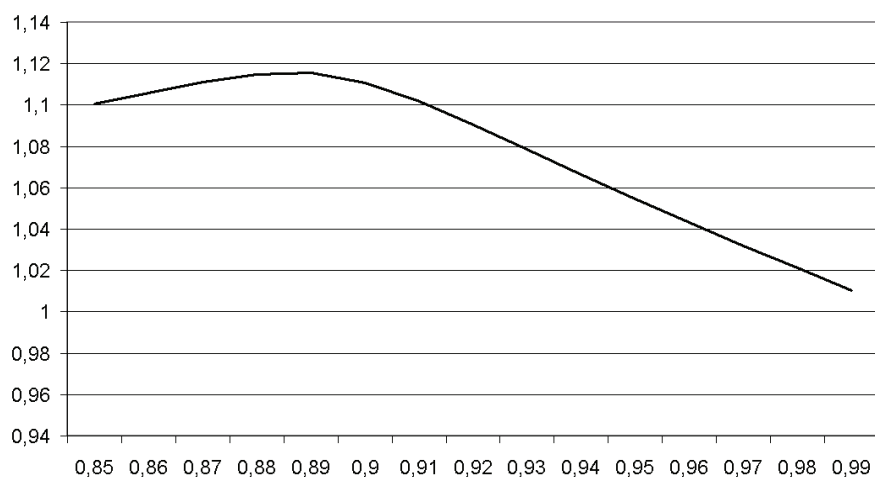


Рис. 5 Зависимость относительной эффективной диэлектрической проницаемости

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

от величины измеренного коэффициента прохождения  $Q_1^{(+)}$

при значениях параметров:  $A^{(+)} = 1$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$ ,  $a_1 = 0,5$ ,  
 $b_1 = 0,25$ ,  $c_1 = 0,5$ ,  $a_2 = 1,5$ ,  $b_2 = 0,75$ ,  $c_2 = 1,5$ ,  $k_0 = 2,5$

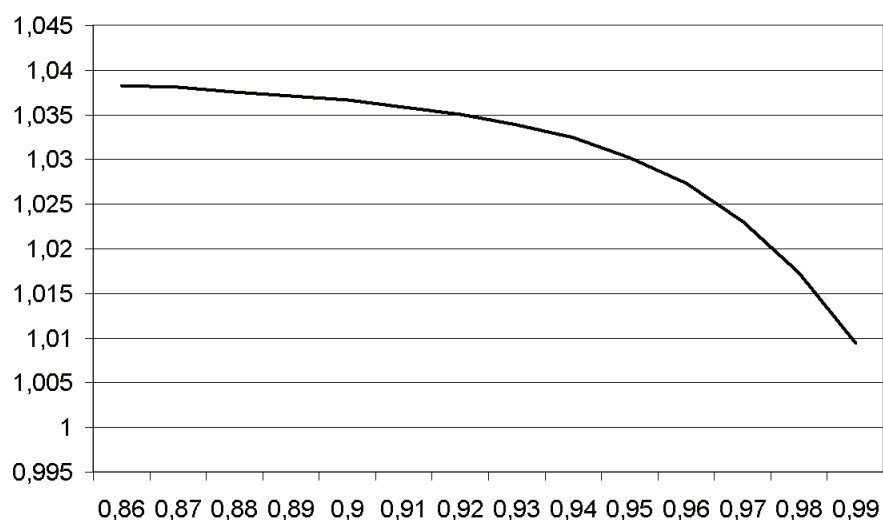


Рис. 6 Зависимость относительной эффективной диэлектрической проницаемости

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

от величины измеренного коэффициента прохождения  $Q_1^{(+)}$

при значениях параметров:  $A^{(+)} = 1$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$ ,  $a_1 = 0$ ,  
 $b_1 = 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $a_2 = 2$ ,  $b_2 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $k_0 = 2,5$

Результаты, представленные на рис. 3, показывают высокую скорость сходимости итерационного процесса. Графики, представленные на рис. 4–6, иллюстрируют возможность расчета относительной эффективной диэлектрической проницаемости материала при различном положении и размерах образца внутри волновода.

**Список литературы**

1. **Shestopalov, Yu. V.** Volume Singular Integral Equations Method for Determination of Effective Permittivity of Meta- and Nanomaterials / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // Proceedings of Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2008). – Cambridge, USA, 2008. – P. 291–292.
2. **Shestopalov, Yu. V.** Development of Mathematical Methods for Reconstructing Complex Permittivity of a Scatterer in a Waveguide / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // Proceedings of 5th International Workshop on Electromagnetic Wave Scattering, October 22–25. – Antalya, Turkey, 2008.
3. **Smirnov, Yu. G.** Method of Volume Singular Integral Equation for Determination of Permittivity of Dielectric Body in a Waveguide / Yu. G. Smirnov // Proceedings of Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2009). – M., 2009.
4. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и Связь, 1998.
5. **Медведик, М. Ю.** Применение ГРИД-технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 2–14.
6. **Смирнов, Ю. Г.** Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 2–10.
7. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 11–24.
8. **Smirnov, Yu. G.** Inverse Boundary Value Problem for Determination of Permittivity of Dielectric Body in a Waveguide Using the Method of Volume Singular Integral Equation / Yu. G. Smirnov // IEEE Transactions on Fundamentals and Materials. – 2009. – V. 129. – № 10. – P. 675–680.
9. **Васюнин, Д. И.** Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала / Д. И. Васюнин, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 68–78.
10. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : Радиотехника, 1996.

---

**Медведик Михаил Юрьевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет

E-mail: [\\_medv@mail.ru](mailto:_medv@mail.ru)

**Medvedik Mikhail Yuryevich**

Candidate of physico-mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University

**Смирнов Юрий Геннадьевич**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математики и суперкомпьютерного  
моделирования, Пензенский  
государственный университет

E-mail: smirnovyug@mail.ru

**Smirnov Yuri Gennadyevich**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
professor, head of sub-department  
of mathematics and supercomputer  
modeling, Penza State University

---

УДК 517.9

**Медведик, М. Ю.**

**Численное решение объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокации** / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 54–69.

## МЕТОД ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБЪЕМНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ<sup>1</sup>

*Аннотация.* Рассматривается задача дифракции электромагнитных волн на объемном теле, расположенном в свободном пространстве. Для изучения интегродифференциальных уравнений, описывающих явление, используется техника псевдодифференциальных операторов. Вычислено асимптотическое разложение символа, доказаны эллиптичность и фредгольмовость с нулевым индексом оператора задачи.

*Ключевые слова:* уравнения Максвелла, псевдодифференциальные операторы, задача дифракции.

*Abstract.* The problem of diffraction electromagnetic waves on a volume body in a free space is considered. The issue is studied by pseudodifferential operators technique. Asymptotic expansion of the operator's symbol is obtained. Ellipticity and Fredholm property with zero index of the operator of the problem are proved.

*Keywords:* Maxwell equation, pseudodifferential operators, diffraction problem.

### 1 Задача дифракции и уравнение электрического поля

Рассмотрим следующую задачу дифракции. Пусть в свободном пространстве  $\mathbb{R}^3$  расположено объемное тело (область)  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ , характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_0$  и  $3 \times 3$ -матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}(x)$ . Компонентами тензора  $\hat{\epsilon}(x)$  являются  $\epsilon_{ij}(x)$  – бесконечно гладкие функции в  $\bar{\Omega}$ , т.е.  $\epsilon_{ij}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , причем  $\epsilon_{ij}(x) = \epsilon'_{ij}(x)/\epsilon_0$ , где  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость свободного пространства.

Из условия конечности энергии необходимо [1], чтобы  $\mathbf{E} \in \mathbf{L}_2(\Omega) = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ .

Требуется определить электромагнитное поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ , возбуждаемое сторонним полем  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$  с временной зависимостью вида  $e^{-i\omega t}$ .

Будем искать электромагнитное поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ , удовлетворяющее уравнениям Максвелла, условиям непрерывности касательных компонент поля при переходе через границу тела и условиям излучения на бесконечности [1].

Задача отыскания  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  сводится к решению интегродифференциального уравнения [1]:

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_{\Omega} \hat{\mathbf{G}}_E(x, y) (\hat{\epsilon}(y) - \mathbf{I}) \mathbf{E}(y) dy +$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки РФ по ФЦП «Развитие потенциала высшей школы» № 2.1.1/1647.

$$+ \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_E(x, y) (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y) - \mathbf{I}) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}(y) = (E_1(y), E_2(y), E_3(y))^T$  – (комплекснозначный) вектор электрического поля и  $y = (y_1, y_2, y_3)$  – точка в пространстве  $\mathbb{R}^3$ ;  $\mathbf{I}$  – единичная  $3 \times 3$ -

матрица;  $\widehat{\mathbf{G}}_E(x, y) = \begin{pmatrix} G_E^1 & 0 & 0 \\ 0 & G_E^2 & 0 \\ 0 & 0 & G_E^3 \end{pmatrix}$  – тензорная функция Грина, где

$$G_E^m(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} + g^m(x, y), \quad x, y \in \bar{\Omega}, \quad g^m \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$$

– гладкая функция ( $m = 1, 2, 3$ );  $k_0$  – волновое число свободного пространства.

В задаче дифракции электромагнитных волн на объемном теле в свободном пространстве функции  $g^m(x, y)$  равны нулю. Но мы будем рассматривать более общий случай, когда эти функции отличны от нуля, что, например, имеет место в задаче дифракции на теле в волноводе [2].

Кроме того, вне тела  $\Omega$  имеем представление для поля [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_E(x, y) (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y) - \mathbf{I}) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_E(x, y) (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y) - \mathbf{I}) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \end{aligned}$$

если  $\mathbf{E}(y)$ ,  $y \in \Omega$  – решение уравнения (1). Поле  $\mathbf{H}$  выражается через  $\mathbf{E}$  из уравнения Максвелла [1].

Пусть  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x) := (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y) - \mathbf{I})^{-1}$  существует при всех  $x \in \Omega$  и  $\mathbf{J}(y) := (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y) - \mathbf{I}) \mathbf{E}(y)$ , откуда  $\mathbf{E}(y) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(y) \mathbf{J}(y)$ , получаем уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\theta}}(x) \mathbf{J}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ & + \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим оператор, отвечающий уравнению (2):

$$A\mathbf{J} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(x) \mathbf{J}(x) - k_0^2 \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad (3)$$

где  $\mathbf{J}(y) = (J_1(y), J_2(y), J_3(y))^T$ .

Оператор (3) можно представить в следующем виде:

$$Au = \widehat{\theta}u - (D \circ T)u, \quad (4)$$

где  $Tu = \int_Q \widehat{\mathbf{G}}_E(x, y)u(y) dy$ ,  $Du = (k_0^2 + \text{grad div})u(y)$ ,  $\widehat{A} \equiv D \circ T$  – композиция дифференциального оператора  $D$  и интегрального оператора  $T$ .

## 2 Теорема о композиции, эллиптичность и фредгольмовость

В этот пункт для удобства читателя мы включили некоторые известные теоретические результаты, которые легко найти, например, в [3–5]. Мы придерживаемся обозначений, принятых в [3].

Класс псевдодифференциальных операторов (ПДО) с символами  $a(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ , принадлежащими пространству Шварца  $S^m = S^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ , будем обозначать через  $L^m$  или  $L^m(\Omega)$ .

Пусть даны два ПДО  $A$  и  $B: C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ , где  $C_0^\infty(\Omega)$  – пространство  $C^\infty$ -функций с компактным носителем в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Для того чтобы композиция  $A \circ B$  имела смысл, достаточно, чтобы либо оператор  $A$ , либо оператор  $B$  был собственным.

Всякий ПДО  $A$  может быть записан в виде  $A = A' + A''$ , где  $A'$  – собственный ПДО, а  $A''$  имеет ядро  $K_{A''} \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ ,  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть даны два псевдодифференциальных оператора (ПДО)  $A$  и  $B: C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ , где  $C_0^\infty(\Omega)$  – пространство  $C^\infty$ -функций с компактным носителем в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Для того чтобы композиция  $A \circ B$  имела смысл, достаточно потребовать, чтобы один из операторов был собственным. Собственность оператора  $A$  равносильна одновременному выполнению двух условий: 1) для любого компакта  $K \subset \Omega$  существует такой компакт  $K_1 \subset \Omega$ , что оператор  $A$  отображает  $C_0^\infty(K)$  в  $C_0^\infty(K_1)$ ; 2) то же самое верно для транспонированного оператора  ${}^tA$  [3].

**Теорема 2.1** (о композиции) [3]. Пусть  $A \in L^{m_1}$ ,  $B \in L^{m_2}$  – два ПДО в области  $\Omega$ , один из которых является собственным. Тогда  $C = A \circ B \in L^{m_1+m_2}$  и  $C = c(x, D_x) + R$ , где  $R \in L^{-\infty}$ , а  $c(x, \xi)$  имеет асимптотическое разложение

$$c(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} (\partial_{\xi}^{\alpha} a(x, \xi)) (D_x^{\alpha} b(x, \xi)).$$

**Определение 2.1** [3]. Матричный оператор  $A = a(x, D) \in L_{\text{кл}}^m(\Omega)$  называется эллиптическим ПДО порядка  $m$ , если  $\det \mathbf{a}_0(x, \xi) \neq 0$ , при  $\xi \neq 0$ , где  $\mathbf{a}_0(x, \xi)$  – главный символ (матричный) оператора  $A$ .

Класс  $L_{\text{кл}}^m$  – класс полиоднородных, или классических, ПДО.



Пусть  $E_1, E_2$  – банаховы пространства;  $\text{Lin}(E_1, E_2)$  – множество всех линейных непрерывных операторов из  $E_1$  в  $E_2$ ;  $\text{Comp}(E_1, E_2)$  – множество всех компактных линейных операторов из  $E_1$  в  $E_2$ ;  $\text{Fred}(E_1, E_2)$  – множество всех фредгольмовых операторов из  $\text{Lin}(E_1, E_2)$ . Индексом фредгольмова оператора  $A$  называется число  $\text{ind } A = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Coker } A$ .

**Теорема 2.4** [4]. Пусть  $A \in \text{Fred}(E_1, E_2)$ ,  $R \in \text{Comp}(E_1, E_2)$ . Тогда  $A + R \in \text{Fred}(E_1, E_2)$ , причем  $\text{ind}(A + R) = \text{ind } A$ .

Мы будем иметь дело с гильбертовыми пространствами, поэтому теорема 2.4 сохраняют силу.

Пусть  $\Omega$  – область, определим нужные нам пространства:  $H_{\text{comp}}^s(\Omega) = E'(\Omega) \cap H^s(\mathbb{R}^n)$ , где  $E'(\Omega)$  – пространство всех обобщенных функций с компактным носителем в  $\Omega$ ,  $H^s(\mathbb{R}^n)$  – пространство Соболева;  $H_{\text{loc}}^s(\Omega)$  – пространство таких  $u \in D'(\Omega)$ , что  $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$  для любой функции  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , где  $D'(\Omega)$  – пространство всех обобщенных функций в  $\Omega$ .

**Теорема 2.5** [4, 5]. Если  $A \in L^m(\Omega)$  и  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^n$ , то  $A$  осуществляет отображение  $A: H_{\text{comp}}^s(\Omega) \rightarrow H_{\text{loc}}^{s-m}(\Omega)$ . Если дополнительно предположить, что  $A$  – собственный, то  $A$  также задает отображения  $A: H_{\text{comp}}^s(\Omega) \rightarrow H_{\text{comp}}^{s-m}(\Omega)$  и  $A: H_{\text{loc}}^s(\Omega) \rightarrow H_{\text{loc}}^{s-m}(\Omega)$ .

### 3 Уравнение электрического поля как псевдодифференциальное уравнение

Перейдем от уравнения (2) к псевдодифференциальному уравнению.

Схема перехода такова: сначала представим операторы  $D$  и  $T$  из (4) как псевдодифференциальные и найдем их символы  $\mathbf{d}(\xi)$  и  $\mathbf{t}(\xi)$  (из дальнейшего будет видно, что символы  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{t}$  не зависят от  $x$ ), затем воспользуемся теоремой о композиции двух ПДО, чтобы найти асимптотическое разложение символа  $\hat{\mathbf{a}}(\xi)$  оператора  $\hat{A} = D \circ T$ . Если у интеграла не обозначена область интегрирования, будем предполагать интегрирование по всему  $\mathbb{R}^3$ .

Разобьем элемент ядра  $G_E^m$  на три слагаемых, для изучения оператора, отвечающего первому слагаемому (его мы обозначим  $\hat{T}$ ), мы перейдем к ПДО, два вторых слагаемых дадут компактные операторы (обозначим их суммой  $R$ , таким образом,  $T = \hat{T} + R$ , где  $R$  – компактный). В дальнейшем под оператором  $T$  мы часто будем иметь в виду  $\hat{T}$ , не оговаривая этого каждый раз (когда в этом не будет необходимости), а поскольку ПДО изучаются с точностью до компактного слагаемого, то мы ничего не теряем.

Поскольку ядром оператора  $T$  служит негладкая в точке  $x = y$  функция  $\hat{\mathbf{G}}_E(x, y)$ , то прежде получим формулу, которая будет позволять сглаживать ядро до любого (конечного) необходимого нам порядка.

Рассмотрим отдельно один из диагональных элементов  $G_E^m$  тензора Грина  $\widehat{G}_E$ . Представим элемент ядра  $G_E^m(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} + g^m(x, y)$  в виде

$$\begin{aligned} G_E^m(x, y) &= e^{ik_0r} \frac{e^{-r}}{4\pi} \left( \frac{1}{r} + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{r^k}{(k+1)!} \right) + e^{ik_0r} \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{k+l}}{l!k!(k+l+1)} + g^m(x, y) = \\ &= e^{ik_0r} \frac{e^{-r}}{4\pi} \left( \frac{1}{r} + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{r^k}{(k+1)!} \right) + g_l(r) + g^m(x, y), \quad l=0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $r = |x - y|$  и первая сумма в (5) при  $l = 0$ , как обычно, считается равной нулю.

Представление (5) получается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{r} - \frac{e^{-r}}{r} + \frac{e^{-r}}{r} = \frac{1}{r} (1 - e^{-r}) + \frac{e^{-r}}{r} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{e^{-r}}{r} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^k}{(k+1)!} + \frac{e^{-r}}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^k}{(k+1)!} + \frac{e^{-r}}{r} - e^{-r} + e^{-r} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^k}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^k}{k!} + e^{-r} \left( \frac{1}{r} + 1 \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} r^k}{(k-1)!(k+1)} + e^{-r} \left( \frac{1}{r} + 1 \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{k+1}}{k!(k+2)} + e^{-r} \left( \frac{1}{r} + 1 \right), \end{aligned}$$

и т.д., каждый раз отнимая и прибавляя произведение  $\alpha e^{-r}$ , где  $\alpha$  – первое слагаемое в остающейся сумме. Например, дальше нужно отнять и прибавить величину  $\frac{r}{2} e^{-r}$ . Причем  $e^{ik_0r} \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{k+l}}{l!k!(k+l+1)} \in C^l(\Omega)$ , т.к. имеем

$$\left( r^l e^{ik_0r} \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left( r^l \right)^{(k)} \left( e^{ik_0r} \right)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k O(r^{l-k}) O(r^{-n+k+1}) = O(r^{l-n+1}),$$

и, следовательно,  $\left( r^l e^{ik_0r} \right)^{(n)} \in C(\Omega)$ , когда  $l - n + 1 \geq 1$ , значит,  $r^l e^{ik_0r} \in C^n(\Omega)$ , как только  $l \geq n$ ,  $r = |x - y|$ .

Формула (5) позволяет сглаживать ядро до нужного нам порядка.

Таким образом, мы представили тензор Грина в виде  $\widehat{G}_E = \widehat{G}_{E,1} + \widehat{R}$ , где слагаемому  $\widehat{R}$ , как будет показано ниже, отвечает компактный оператор (выше мы обозначили его  $R$ ).

Рассмотрим оператор  $T$  с ядром  $\widehat{G}_{E,1}$ , где на диагонали стоят элементы  $G_{E,1}^m(r) = e^{ik_0 r} \frac{e^{-r}}{4\pi} \left( \frac{1}{r} + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{r^k}{(k+1)!} \right)$  (см. формулу (5)) и найдем его преобразование Фурье, где  $r = |x - y|$ .

Обозначим  $T_m u = \int G_{E,1}^m(|x - y|) u(y) dy$ , теперь мы считаем, что интеграл берется по всему  $\mathbb{R}^3$  (поскольку носитель функции  $u(x)$  – компактное множество, мы можем доопределить  $u(x)$  нулем вне носителя):

$$\begin{aligned} F[T_m](u) &= F \left[ \int G_{E,1}^m(|t - y|) u(y) dy \right] = \int e^{-it \cdot \xi} \int G_{E,1}^m(|t - y|) u(y) dy dt = \\ &= \int e^{-it \cdot \xi} G_{E,1}^m(|t|) dt \times \int e^{-it \cdot \xi} u(t) dt, \end{aligned}$$

где последнее равенство получено в силу свойства преобразования Фурье свертки функций.

Обратимся к вычислению первого сомножителя. Поскольку  $t$  и  $\xi$  – векторы в  $\mathbb{R}^3$ , то  $t \cdot \xi = |t| |\xi| \cos \gamma$ , где  $\gamma$  – угол между этими векторами. Введем сферическую систему координат, причем ось  $t_3$  направим по вектору  $\xi$  (см. рис. 1).

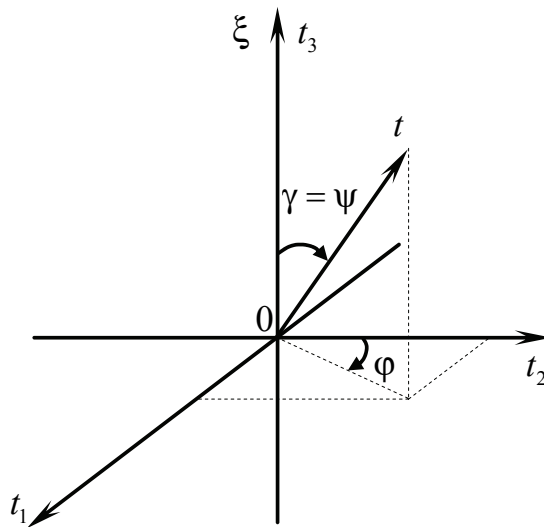


Рис. 1

Имеем:  $t_1 = r \sin \psi \cos \varphi$ ,  $t_2 = r \sin \psi \sin \varphi$ ,  $t_3 = r \cos \psi$ ,  $\text{Jac} = r^2 \sin \psi$ . Очевидно, что  $\gamma = \psi$ , и мы получаем:

$$\int e^{-it \cdot \xi} G_{E,1}^m(|t|) dt = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{-ir|\xi| \cos \psi} G_{E,1}^m(r) r^2 \sin \psi d\psi =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \int_0^{\infty} G_{E,1}^m(r) r^2 dr \int_0^{\pi} e^{-ir|\xi|\cos\psi} \sin\psi d\psi = \\
 &= 2\pi \int_0^{\infty} G_{E,1}^m(r) r^2 \left( \frac{e^{-ir|\xi|\cos\psi}}{ir|\xi|} \Big|_0^{\pi} \right) dr \int_0^{\pi} e^{-ir|\xi|\cos\psi} \sin\psi d\psi = \\
 &= \frac{2\pi}{i|\xi|} \int_0^{\infty} G_{E,1}^m(r) r \left( e^{ir|\xi|} - e^{-ir|\xi|} \right) dr = \\
 &= \frac{4\pi}{i|\xi|} \int_0^{\infty} G_{E,1}^m(r) r \operatorname{sh}(ir|\xi|) dr = \frac{4\pi}{i|\xi|} \int_0^{\infty} \frac{e^{-r(1-ik_0)}}{4\pi} \left( 1 + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{r^{k+1}}{(k+1)!} \right) \operatorname{sh}(ir|\xi|) dr = \\
 &= \frac{1}{i|\xi|} \int_0^{\infty} e^{-r(1-ik_0)} \operatorname{sh}(ir|\xi|) \sum_{k=0}^l \frac{r^k}{k!} dr = \frac{1}{i|\xi|} \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} e^{-r(1-ik_0)} r^k \operatorname{sh}(ir|\xi|) dr = \\
 &= \frac{1}{2i|\xi|} \sum_{k=0}^l \frac{\Gamma(k+1)}{k!} \left[ (1-ik_0 - i|\xi|)^{-k-1} - (1-ik_0 + i|\xi|)^{-k-1} \right] = \\
 &= \frac{1}{2i|\xi|} \sum_{k=0}^l (k+1) \frac{(1-ik_0 + i|\xi|)^{k+1} - (1-ik_0 - i|\xi|)^{k+1}}{\left( (1-ik_0)^2 + |\xi|^2 \right)^{k+1}}.
 \end{aligned}$$

Пусть

$$t(\xi) = \frac{1}{2i|\xi|} \sum_{k=0}^l (k+1) \frac{(1-ik_0 + i|\xi|)^{k+1} - (1-ik_0 - i|\xi|)^{k+1}}{\left( (1-ik_0)^2 + |\xi|^2 \right)^{k+1}}, \quad (6)$$

тогда

$$F[T_m](u) = \int e^{-it \cdot \xi} G_{E,1}^m(|t|) dt \times \int e^{-it \cdot \xi} u(t) dt = t(\xi) \int e^{-it \cdot \xi} u(t) dt. \quad (7)$$

Используя формулу (7), мы получаем

$$T_m u = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint e^{i(x-t) \cdot \xi} t(\xi) u(t) dt d\xi. \quad (8)$$

Это уже представление оператора  $T_m$  как ПДО с точностью до компактного слагаемого  $R_m$  ( $R_m$  – скалярный оператор, а  $R$  – матричный), отвечающего слагаемым ядра  $g_l$  и  $g^m$  из формулы (5).

Теперь мы преобразуем символ (6) в полиоднородный, это нам понадобится в дальнейшем. Пока будем рассматривать одно слагаемое вида

$$t_k(\xi) = \frac{k+1}{2i|\xi|} \left( \frac{1}{(1-ik_0-i|\xi|)^{k+1}} - \frac{1}{(1-ik_0+i|\xi|)^{k+1}} \right).$$

Введем обозначения:  $1-ik_0 = \alpha$ ,  $i|\xi| = r$ , получаем

$$\begin{aligned} t_k(r) &= \frac{k+1}{2r^{k+2}} \left( (-1)^{k+1} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-k-1} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^{-k-1} \right) = \\ &= \frac{k+1}{2r^{k+2}} \left( (-1)^{k+1} t_k^-(r) - t_k^+(r) \right), \end{aligned}$$

где  $t_k^-(r) = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-k-1}$ ,  $t_k^+(r) = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^{-k-1}$ .

Воспользуемся биномиальным разложением для  $t_k^-(r)$ ,  $t_k^+(r)$ , получаем

$$t_k^-(r) = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!k!} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^n;$$

и

$$t_k^+(r) = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^{-k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(k+n)!}{n!k!} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^n.$$

Теперь мы можем выписать  $t_k(r)$ :

$$t_k(r) = \frac{k+1}{2r^{k+2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!k!} \left( (-1)^{k+1} - (-1)^n \right) \left(\frac{\alpha}{r}\right)^n.$$

Найдем выражение для  $t(r)$ :

$$\begin{aligned} t(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \frac{k+1}{2r^{k+2}} \frac{(k+n)!}{n!k!} \left( (-1)^{k+1} - (-1)^n \right) \left(\frac{\alpha}{r}\right)^n = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -1 - (-1)^n \right) \frac{1}{n!} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^n \sum_{k=0}^l \frac{(2k+1)(n+2k)!}{(2k)!r^{2k+2}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - (-1)^n \right) \frac{1}{n!} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^n \sum_{k=0}^l \frac{(2k+2)(n+2k+1)!}{(2k+1)!r^{2k+3}} = \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{2n} \sum_{k=0}^l \frac{(2k+1)(2n+2k)!}{(2k)!r^{2k+2}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{2n+1} \sum_{k=0}^l \frac{(2k+2)(2n+1+2k+1)!}{(2k+1)!r^{2k+3}} = \\
 & = -\frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{2n} \sum_{k=0}^l \frac{(2k+1)(2n+2k)!}{(2k)!r^{2k}} + \\
 & + \frac{\alpha}{r^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{2n} \sum_{k=0}^l \frac{(2k+2)(2n+1+2k+1)!}{(2k+1)!r^{2k}}.
 \end{aligned}$$

В результате мы получаем такое разложение:

$$\begin{aligned}
 t(r) = & -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}(-3+4\alpha-\alpha^2) + \frac{1}{r^6}(-5+16\alpha-18\alpha^2+8\alpha^3-\alpha^4) + \\
 & + \frac{1}{r^8}(-7+36\alpha-75\alpha^2+80\alpha^3-45\alpha^4+12\alpha^5) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(\alpha)}{r^{2n}},
 \end{aligned}$$

где  $p_n(\alpha)$  – многочлен от  $\alpha$ , его степень в общем случае не равна  $n$ .

Вернемся в выражении для символа  $t(\xi)$  к старым переменным, получим

$$t(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(1-ik_0)}{(i|\xi|)^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p_n(1-ik_0)}{|\xi|^{2n}}. \quad (9)$$

Из формулы (9) видно, что символ  $t(\xi)$  является полиоднородным (классическим), а оператор ему отвечающий – полиоднородный (классический) ПДО.

Теперь мы можем выписать символ оператора  $T$ , рассматриваемого как ПДО:

$$\mathbf{t}(\xi) = t(\xi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = t(\xi) \mathbf{I}.$$

Рассмотрим оператор  $D = (k_0^2 + \text{grad div})$ . Нетрудно показать, что символ  $\mathbf{d}(\xi)$  оператора  $D$ , рассматриваемого как ПДО, будет равен

$$\mathbf{d}(\xi) = - \begin{pmatrix} \xi_1^2 - k_0^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 - k_0^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 - k_0^2 \end{pmatrix}.$$

По теореме о композиции  $D \circ T$  – ПДО и асимптотическое разложение символа оператора  $D \circ T$  есть  $\mathbf{dt}(\xi)$  (теорема о композиции имеет место, поскольку оператор  $D$  является собственным):

$$\mathbf{dt}(\xi) = -t(\xi) \begin{pmatrix} \xi_1^2 - k_0^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 - k_0^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 - k_0^2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Уравнение (2) как псевдодифференциальное запишется в виде

$$A\mathbf{J} = \mathbf{E}^0, \quad (11)$$

где

$$A\mathbf{J} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint e^{i(x-y)\xi} (\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x) - \mathbf{dt}(\xi)) \mathbf{J}(y) dy d\xi, \quad (12)$$

где  $\mathbf{dt}(\xi)$  определяется формулой (10).

#### 4 Эллиптичность и фредгольмовость ПДО задачи

В этом пункте на основе изучения символа (10) оператора (12) мы покажем, что этот оператор при некоторых ограничениях является эллиптическим на  $\Omega$ . Мы также докажем фредгольмовость этого оператора при дополнительном условии.

Пусть  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{|\xi|^2} \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 \end{pmatrix}$ . Рассмотрим выражение

$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x) + \widehat{\boldsymbol{\sigma}} = [\mathbf{I} + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})] \widehat{\boldsymbol{\theta}}(x) = \mathbf{a}_0(x, \xi)$ . Это выражение – главный символ исследуемого ПДО (12). Вычислим  $\det \mathbf{a}_0(x, \xi)$ , важно, чтобы он не обращался в нуль (см. определение в п. 3):

$$\det \mathbf{a}_0(x, \xi) = \det([\mathbf{I} + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})] \widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)) = \det(\mathbf{I} + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})) (\det(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I}))^{-1}.$$

Полагаем, что

$$\det(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I}) \neq 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (13)$$

(это соответствует физическим ограничениям). Имеем для  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$  представление в виде

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{|\xi|^2} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1/|\xi| \\ \xi_2/|\xi| \\ \xi_3/|\xi| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1/|\xi| & \xi_2/|\xi| & \xi_3/|\xi| \end{pmatrix},$$

очевидно, можно положить  $\frac{\xi_i}{|\xi|} = \cos \alpha_i$ , где  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$ .

Определитель  $\det \mathbf{a}_0(x, \xi)$  отвечает за эллиптичность оператора  $A$ .

Введем следующие обозначения:  $\mathbf{n}^T = (\cos \alpha_1 \quad \cos \alpha_2 \quad \cos \alpha_3)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = (\varepsilon_{1i} \quad \varepsilon_{2i} \quad \varepsilon_{3i})^T$ ,  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = a_i$ . Теперь определитель  $\det(\mathbf{I} + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I}))$  вычислить просто:

$$\det(\mathbf{I} + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})) = \begin{vmatrix} 1 + \cos \alpha_1 (a_1 - \cos \alpha_1) & \cos \alpha_1 (a_2 - \cos \alpha_2) & \cos \alpha_1 (a_3 - \cos \alpha_3) \\ \cos \alpha_2 (a_1 - \cos \alpha_1) & 1 + \cos \alpha_2 (a_2 - \cos \alpha_2) & \cos \alpha_2 (a_3 - \cos \alpha_3) \\ \cos \alpha_3 (a_1 - \cos \alpha_1) & \cos \alpha_3 (a_2 - \cos \alpha_2) & 1 + \cos \alpha_3 (a_3 - \cos \alpha_3) \end{vmatrix}.$$

Используя свойства определителей и обозначения  $\cos \alpha_i = b_i$ ,  $a_i - \cos \alpha_i = c_i$ , получаем следующее:

$$\det(\mathbf{I} + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})) = \begin{vmatrix} b_1 c_1 & b_1 c_2 & b_1 c_3 \\ b_2 c_1 & 1 + b_2 c_2 & b_2 c_3 \\ b_3 c_1 & b_3 c_2 & 1 + b_3 c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_2 c_1 & 1 + b_2 c_2 & b_2 c_3 \\ b_3 c_1 & b_3 c_2 & 1 + b_3 c_3 \end{vmatrix}.$$

Далее точно так же поступаем с каждой строкой, в которой есть элемент вида  $1 + a_i b_i$ , получим сумму определителей, которые состоят только из элементов вида  $a_i b_i$ , 1 и 0. После простейших выкладок получаем окончательный результат:

$$\Delta(x) \equiv \det(\mathbf{I} + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})) = \sum_{i,j=1}^3 \cos \alpha_i \cos \alpha_j \varepsilon_{ij} \neq 0, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (14)$$

Ограничение, о котором шла речь в начале этого пункта, – это отличие от нуля последнего определителя.

Из вышесказанного следует

**Теорема 4.1.** Оператор  $A: H_{\text{comp}}^s(\Omega) \rightarrow H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ , определенный по формуле (12), является эллиптическим ПДО при условиях (13) и (14).

Теперь докажем фредгольмовость этого оператора.

Определим пространства Соболева:

$$H^s(\Omega) := \left\{ u|_{\Omega} : u \in H^s(\mathbb{R}^2) \right\} \quad \text{и} \quad \tilde{H}^s(\bar{\Omega}) := \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^2) : \text{supp } u \subset \bar{\Omega} \right\}.$$

Будем рассматривать указанные пространства при  $s \geq 0$  исходя из физических соображений (условие конечности энергии в любом ограниченном объеме) [1].

Мы докажем при некоторых дополнительных условиях фредгольмовость с нулевым индексом оператора  $A$  в двух случаях. Представим  $A$  в виде  $A = A_0 + A'$ , где  $A_0$  определяется символом  $\mathbf{a}_0(x, \xi) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(x) + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\xi)$ ;  $A'$  – компактный оператор. Из формул (9) и (10) видно, что оператор  $A'$  действует из  $H^s$  в  $H^{s+2}$ . Поскольку  $H^{s+2}$  компактно вкладывается в  $H^s$ , то из этого следует компактность  $A'$ . Поскольку индекс фредгольмова оператора не ме-



няется при прибавлении к нему компактного оператора, то нам достаточно доказать фредгольмовость с нулевым индексом оператора  $A_0$ .

Известно (см., например, [6]), что если ограниченный оператор  $A$  имеет вид  $A = S + T$ , где  $S$  – непрерывно обратим, а  $T$  – компактный, то  $A$  – фредгольмов оператор с нулевым индексом.

Нам остается доказать непрерывную обратимость оператора  $A_0$ .

**Случай 1.** Докажем, что  $\operatorname{Re}(A_0 u, u) \geq C_0 \|u\|_0^2$ . Это будет иметь место когда  $\operatorname{Re}(\widehat{\theta}(x)u(x), u(x)) \geq C_1 \|u\|_0^2$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A_0 u, u) &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} \widehat{\theta}(x)u(x) \cdot \overline{u(x)} dx + \\ &+ \operatorname{Re} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} e^{i(x-y)\xi} \widehat{\mathfrak{G}}(\xi)u(y) dy d\xi \right) \cdot \overline{u(x)} dx = \\ &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} \widehat{\theta}(x)u(x) \cdot \overline{u(x)} dx + \\ &+ \operatorname{Re} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega} \widehat{\mathfrak{G}}(\xi) \left( \int_{\Omega} e^{-iy \cdot \xi} u(y) dy \right) \cdot \left( \int_{\Omega} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx \right) d\xi = \\ &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} \widehat{\theta}(x)u(x) \cdot \overline{u(x)} dx + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega} \left| \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \tilde{u}(\xi) \right|^2 d\xi \geq C_1 \|u\|_0^2. \end{aligned}$$

При проведении вычислений мы воспользовались известной теоремой Планшереля о переходе к образам Фурье в скалярном произведении (см., например, [7]). Поскольку теорема Планшереля имеет место для  $s = 0$  (т.е. для пространства  $L_2$ ), то фредгольмовость с нулевым индексом доказана в пространствах  $H^0(\Omega)$ .

Рассмотрим условие  $\operatorname{Re}(\widehat{\theta}(x)u(x), u(x)) \geq C_1 \|u\|_0^2$ , имея в виду, что  $\operatorname{Re}(\widehat{\theta}(x)u(x), u(x)) = \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\widehat{\theta}(x)u(x) \cdot \overline{u(x)}) dx$ . Пусть  $u = \widehat{\theta}^{-1}v = (\widehat{\varepsilon}(x) - \mathbf{I})v$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\widehat{\theta}(x)u(x) \cdot \overline{u(x)}) &= \operatorname{Re} v \cdot \overline{(\widehat{\varepsilon}(x) - \mathbf{I})v} = \\ &= \operatorname{Re} \overline{v} \cdot (\widehat{\varepsilon}(x) - \mathbf{I})v = \operatorname{Re} \overline{v} \cdot (\widehat{\varepsilon}(x) - \mathbf{I})v = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{Re} \widehat{\varepsilon}(x)v \cdot \overline{v} - |v|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, условие  $\operatorname{Re}(\widehat{\theta}(x)u(x), u(x)) \geq C_1 \|u\|_0^2$  следует из

$$\operatorname{Re} \widehat{\varepsilon}(x)v \cdot \overline{v} \geq (C_2 + 1)|v|^2, \text{ при } x \in \bar{\Omega} \text{ и } C_2 > 0. \quad (15)$$

**Случай 2.** Чтобы показать, что  $\text{Ker } A_0 = \{0\}$ , достаточно (см., например, [8]) доказать, что  $\text{Im}(A_0 u, u) \geq C_0 \|u\|_0^2$ . Последнее выполняется при условии  $\text{Im}(\widehat{\theta}(x)u(x), u(x)) \geq C_2 \|u\|^2$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ . Вычисления здесь аналогичны случаю 1, но условия на тензор  $\widehat{\varepsilon}$ , которые мы получим в результате, будут другими.

Рассмотрим условие  $-\text{Im}(\widehat{\theta}(x)u(x), u(x)) \geq C_2 \|u\|^2$ , имея в виду, что

$$-\text{Im}(\widehat{\theta}(x)u(x), u(x)) = -\int_{\Omega} \text{Im}(\widehat{\theta}(x)u(x) \cdot u(x)) dx.$$

Пусть  $u = \widehat{\theta}^{-1}v = (\widehat{\varepsilon}(x) - \mathbf{I})v$ . Тогда

$$\begin{aligned} -\text{Im}(\widehat{\theta}(x)u(x) \cdot u(x)) &= -\text{Im}v \overline{(\widehat{\varepsilon}(x) - \mathbf{I})v} = \\ &= -\text{Im} \overline{(\widehat{\varepsilon}(x) - \mathbf{I})v} = \text{Im} \overline{v} (\widehat{\varepsilon}(x) - \mathbf{I})v = \text{Im} \widehat{\varepsilon}(x)v \cdot \overline{v}. \end{aligned}$$

Таким образом, условие  $\text{Im}(\widehat{\theta}(x)u(x), u(x)) \geq C_1 \|u\|^2$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ , следует из

$$\text{Im} \widehat{\varepsilon}(x)v \cdot \overline{v} \geq C_3 |v|^2 \text{ при } x \in \bar{\Omega}. \quad (16)$$

**Теорема 4.2.** Пусть выполнены условия (13) и (14). Тогда, если дополнительно выполнено одно из двух условий (15) или (16), то оператор  $A: \mathbf{L}_2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}_2(\Omega)$ , определенный формулой (12), является фредгольмовым с нулевым индексом.

## 5 О компактности оператора $R$

Здесь мы докажем компактность матричного оператора  $R$ , состоящего из скалярных операторов  $R_m$ , с ядрами  $g_l(|x-y|) + g^m(x, y)$  (см. формулу (5)).

Пусть  $\Omega$  – область с бесконечно гладкой границей.

**Теорема 5.1** [9]. Пространство  $H^k(\Omega)$  компактно вкладывается в  $C^l(\Omega)$ , если  $k-l > n/2$ .

Ясно, что тогда и  $\tilde{H}^k(\bar{\Omega})$  (см. обозначения в конце п. 4) компактно вкладывается в  $C^l(\Omega)$  при тех же условиях.

Рассмотрим интегральный оператор с ядром  $g_l(|x-y|)$ . Функция  $g_l(|x-y|)$  на области  $\Omega$  является ограниченной, следовательно, и интегральный оператор будет ограниченным. Кроме того, т.к. функция  $g_l(|x-y|) \in C^l(\Omega)$ , то интегральный оператор с ядром  $g_l(|x-y|)$  действует из  $C^l(\Omega)$  в  $C^l(\Omega)$ . Тогда из теоремы 5.1 следует компактность этого опера-

тора как оператора из  $\tilde{H}^s(\bar{\Omega})$  в  $C^l(\Omega)$  при  $s > l + 3/2$ . Легко показать, что тождественный оператор  $I: C^k(\Omega) \rightarrow H^k(\Omega)$  является оператором вложения. Оператор вложения всегда ограничен. Из этого следует компактность интегрального оператора с ядром  $g_l(|x-y|)$  из  $\tilde{H}^s(\bar{\Omega})$  в  $H^l(\Omega)$  при  $s > l + 3/2$ . Наличие оператора дифференцирования в композиции операторов не играет ключевой роли, поскольку гладкость функции  $g_l(|x-y|)$  мы можем повысить до нужного порядка. Аналогичное утверждение (о компактности) будет иметь место и для оператора, отвечающего слагаемому  $g^m(x,y)$  в формуле (5), поскольку это слагаемое бесконечно гладкое.

Таким образом, мы обосновали все этапы перехода от уравнения (2) к уравнению (11) и доказали, что оператор  $A$ , определенный формулой (12), является фредгольмовым с нулевым индексом при условиях (13), (14) и любом из условий (15) или (16).

### Список литературы

1. **Самохин, А. Б.** Итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М.: Радио и связь, 1998.
2. **Smirnov, Yu. G.** Investigation of Electromagnetic Diffraction by a Dielectric Body in a Waveguide Using the Method of Volume Singular Integral Equation / K. Kobayashi, Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov // SIAM Journal of Applied Mathematics. – 2009. – V. 70. – № 3. – P. 969–983.
3. **Егоров, Ю. В.** Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории / Ю. В. Егоров, М. А. Шубин // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – Т. 31. Итоги науки и техники. – М.: ВИНТИ, 1988. – С. 5–125.
4. **Шубин, М. А.** Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория / М. А. Шубин. – М.: Добросвет, 2005.
5. **Ремпель, Ш.** Введение в общую теорию индекса эллиптических краевых задач / Ш. Ремпель, Б.-В. Шульце. – М.: Мир, 1986.
6. **Като, Т.** Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М.: Мир, 1972.
7. **Егоров, Ю. В.** Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы / Ю. В. Егоров. – М.: Изд-во Московского университета, 1985.
8. **Панич, О. И.** Введение в общую теорию эллиптических краевых задач / О. И. Панич. – Киев: Вища Школа, 1986.
9. **Мазья, В. Г.** Пространства Соболева / В. Г. Мазья. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1985.

---

#### **Валовик Дмитрий Викторович**

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет

E-mail: dvalovik@mail.ru

#### **Valovik Dmitry Viktorovich**

Candidate of physico-mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University

**Смирнов Юрий Геннадьевич**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математики и суперкомпьютерного  
моделирования, Пензенский  
государственный университет

E-mail: smirnovyug@mail.ru

**Smirnov Yuri Gennadyevich**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
professor, head of sub-department  
of mathematics and supercomputer  
modeling, Penza State University

---

УДК 517.958; 517.968.23

**Валовик, Д. В.**

**Метод псевдодифференциальных операторов для исследования  
объемного сингулярного интегрального уравнения электрического  
поля / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений.  
Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). –  
С. 70–84.**

## СИНТЕЗ НАДЕЖНЫХ НЕВЕТВЯЩИХСЯ ПРОГРАММ С УСЛОВНОЙ ОСТАНОВКОЙ В ПОЛНОМ КОНЕЧНОМ БАЗИСЕ, СОДЕРЖАЩЕМ $x_1$ & $x_2$

*Аннотация.* Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с условной остановкой в полном конечном базисе  $B$ , содержащем конъюнкцию  $x_1$  &  $x_2$ . Предполагается, что функциональные операторы с вероятностью  $\epsilon$  подвержены инверсным неисправностям на выходах. Решается задача синтеза надежных неветвящихся программ в двух случаях: 1) оператор условной остановки абсолютно надежен; 2) оператор условной остановки ненадежен.

*Ключевые слова:* булевы функции, неветвящиеся программы, оператор условной остановки, синтез, надежность.

*Abstract.* The problem of synthesis of nonbranching programs with conditional stop-operator is considered in full finite basis, contained  $x_1$  &  $x_2$ . All functional operators are supposed to be prone output inverse failures. This problem is solved for two cases: 1) conditional stop-operator is absolutely reliable; 2) conditional stop-operator is unreliable.

*Keywords:* boolean functions, nonbranching programs, conditional stop-operator, synthesis, reliability.

### Введение

Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с условной остановкой [1] в базисе  $B$ , содержащем конъюнкцию  $x_1$  &  $x_2$ . Программы с условной остановкой характеризуются наличием управляющей команды – команды условной остановки, дающей возможность досрочного прекращения работы при выполнении определенного условия. Введем необходимые понятия и определения.

Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  – множество независимых булевых переменных;  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$  – набор независимых переменных. Введем множества переменных  $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$  и  $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$ . Переменные из множества  $Y$  назовем внутренними, переменные из множества  $Z$  – выходными переменными. Пусть далее  $a \in Y \cup Z, b_1, \dots, b_d \in X \cup Y \cup Z (d \in \{1, 2, \dots, n\})$ ,  $h$  – булева функция из базиса  $B$ , зависящая не более чем от  $d$  переменных. *Вычислительной командой*  $p$  назовем выражение  $p: a = h(b_1, \dots, b_d)$ . Переменную  $a$  назовем *выходом* вычислительной команды, переменные  $b_1, \dots, b_d$  – *входами* этой команды.

Пусть теперь  $a \in X \cup Y \cup Z$ . *Командой остановки*  $p$  назовем выражение  $p: Stop(a)$ . Переменную  $a$  назовем *входом* команды остановки  $p$ .

Последовательность  $Pr = p_1 \dots p_i \dots p_l$ , состоящая из вычислительных команд и команд остановки, называется *неветвящейся программой с условной остановкой*, если при любом  $j \in \{1, 2, \dots, L\}$  каждый вход команды  $p_j$  есть

либо независимая переменная, либо выход некоторой вычислительной команды  $p_i$ , где  $i < j$ .

Неветвящаяся программа работает в дискретные моменты времени  $t = 0, 1, 2, \dots$ , не изменяет значения независимых переменных и изменяет значения внутренних и выходных переменных. Значения  $y_i(\tilde{x}; t)$  внутренних переменных  $y_i$  и значения  $z_j(\tilde{x}; t)$  выходных переменных  $z_j$  программы  $Pr$  в произвольный момент времени  $t$  на наборе независимых переменных  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$  определим индуктивно следующим образом:

– в начальный момент времени ( $t = 0$ ) значения всех внутренних и выходных переменных считаем неопределенными;

– если команда  $p_t$  не изменяет значения внутренней переменной  $y_i$  (или выходной переменной  $z_j$ ), то положим

$$y_i(\tilde{x}; t) = y_i(\tilde{x}; t-1), \quad z_j(\tilde{x}; t) = z_j(\tilde{x}; t-1);$$

– если команда  $p_t$  изменяет значения внутренней переменной  $y_i$  (или выходной переменной  $z_j$ ) и значения  $(1, \dots, d)$ -х входов команды  $p_t$  в момент времени  $(t-1)$  равны соответственно  $b_1(\tilde{x}; t-1), \dots, b_d(\tilde{x}; t-1)$ , то положим

$$y_i(\tilde{x}; t) = h_t(b_1(\tilde{x}; t-1), \dots, b_d(\tilde{x}; t-1));$$

$$z_j(\tilde{x}; t) = h_t(b_1(\tilde{x}; t-1), \dots, b_d(\tilde{x}; t-1)).$$

Значением команды  $p_t$  программы  $Pr$  на наборе независимых переменных  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$  назовем значение ее выхода в момент времени  $t$  и обозначим  $p_t(\tilde{x})$ .

Через  $k(p)$  обозначим номер команды  $p$  в программе  $Pr$ , т.е.  $k(p_i) = i$ . Пусть  $p_{t_1}, \dots, p_{t_r}$  – все команды остановки из  $Pr$ , причем  $t_1 < \dots < t_r$ . Тогда через  $s_j$  будем обозначать  $j$ -ю команду остановки программы  $Pr$ , т.е.  $s_j \equiv p_{t_j}$ .

Вычислительную команду  $p_i$  (переменную  $x_i$ ) назовем аргументом команды остановки  $s_j$ ,  $k(s_j) = r$ , и обозначим через  $q_j$ , если:

1) выход команды  $p_i$  (переменная  $x_i$ ) является входом команды  $s_j$ ;

2) среди команд  $p_t, i < t < r$  нет команды, выход которой совпадает с выходом команды  $p_i$ .

Будем говорить, что  $k$ -я команда остановки  $s_k$  прекращает вычисления программы  $Pr$  на наборе  $\tilde{x}$ , если

$$q_1(\tilde{x}) = \dots = q_{k-1}(\tilde{x}) = 0, \quad q_k(\tilde{x}) = 1.$$

Результат действия программы  $Pr$  на наборе  $\tilde{x}$  обозначим через  $Pr(\tilde{x})$  и его  $l$ -ю компоненту  $Pr_l(\tilde{x})$  определим следующим образом:

$$Pr_l(\tilde{x}) = \begin{cases} z_l(\tilde{x}; t_k), & \text{если } q_1(\tilde{x}) = \dots = q_{k-1}(\tilde{x}) = 0, q_k(\tilde{x}) = 1, \\ z_l(\tilde{x}; L), & \text{если } q_1(\tilde{x}) = \dots = q_r(\tilde{x}) = 0, \end{cases}$$

т.е.  $Pr_l(\tilde{x})$  равно значению выходной переменной в момент остановки программы.

Ясно, что

$$\begin{aligned} Pr_l(\tilde{x}) = & q_1(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_1) \vee \bar{q}_1(\tilde{x})q_2(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_2) \vee \dots \\ & \dots \vee \bar{q}_1(\tilde{x})\bar{q}_2(\tilde{x}) \dots \bar{q}_{k-1}(\tilde{x})q_k(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_k) \vee \dots \\ & \dots \vee \bar{q}_1(\tilde{x})\bar{q}_2(\tilde{x}) \dots \bar{q}_{r-1}(\tilde{x})q_r(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_r) \vee \dots \vee \bar{q}_1(\tilde{x})\bar{q}_2(\tilde{x}) \dots \bar{q}_r(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; L). \end{aligned} \quad (1)$$

Иногда формулу (1) удобнее использовать в преобразованном виде:

$$\begin{aligned} Pr_l(\tilde{x}) = & q_1(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_1) \vee \bar{q}_1(\tilde{x})(q_2(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_2) \vee \bar{q}_2(\tilde{x})(\dots \\ & \dots (q_{k-1}(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_{k-1}) \vee \bar{q}_{k-1}(\tilde{x})(\dots \\ & \dots \vee \bar{q}_{r-1}(\tilde{x})(q_r(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_r) \vee \bar{q}_r(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; L)) \dots \dots)). \end{aligned} \quad (2)$$

Будем говорить, что программа  $Pr$  вычисляет  $n$ -местную булеву функцию  $f$ , если  $Pr(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$  для любого  $\tilde{x} \in \{0,1\}^n$ .

### 1 Неветвящиеся программы с абсолютно надежным оператором условной остановки

Будем предполагать, что оператор условной остановки абсолютно надежен, а все вычислительные операторы базиса  $B$  независимо друг от друга с вероятностью  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \in (0, 1/2)$ ) подвержены инверсным неисправностям на выходах. Поскольку оператор условной остановки абсолютно надежен, он срабатывает, когда на его вход поступает единица. Инверсные неисправности на выходах вычислительных операторов характеризуются тем, что в исправном состоянии вычислительный оператор реализует приписанную ему булеву функцию  $\varphi$ , а в неисправном – функцию  $\bar{\varphi}$ .

Программа  $Pr$  реализует булеву функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$ , если она реализует ее при отсутствии неисправностей.

Ненадежностью  $N(Pr)$  программы  $Pr$  назовем максимальную вероятность ошибки на выходе программы  $Pr$  при всевозможных входных наборах.

Обозначим  $N_\varepsilon(f) = \inf N(Pr)$ , где инфимум берется по всем программам  $Pr$  из ненадежных операторов, реализующим булеву функцию  $f(\tilde{x})$ .

Чтобы сравнить полученные в этой работе результаты с известными результатами для схем из функциональных элементов (ФЭ), введем понятия ненадежности схемы и асимптотически оптимальной схемы.

Ненадежностью  $N(S)$  схемы  $S$  из функциональных элементов, подверженных инверсным неисправностям на выходах, назовем максимальную вероятность ошибки на выходе схемы  $S$  при всевозможных входных наборах. Обозначим  $N_\varepsilon(f) = \inf N(S)$ , где инфимум берется по всем схемам  $S$  из ненадежных элементов, реализующим булеву функцию  $f(\tilde{x})$ .

Схема  $A$  из ненадежных элементов, реализующая функцию  $f$ , называется асимптотически оптимальной по надежности, если  $N(A) \sim N_\varepsilon(f)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N_\varepsilon(f)}{N(A)} = 1.$$

Сформулируем известные результаты для схем из ФЭ.

**Теорема 1** [2]. В произвольном полном конечном базисе при  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  любую булеву функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S$  с ненадежностью  $P(S) \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ .

Константа 5 в оценке ненадежности из теоремы 1 в общем случае не может быть понижена [3].

Обозначим  $K(n)$  – множество булевых функций  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , не представимых в виде  $(x_i^a \& g(\tilde{x}))^b$  ( $i=1, 2, \dots, n, a, b \in \{0, 1\}$ ), где  $g(\tilde{x})$  – произвольная функция.

**Теорема 2** [3]. Пусть  $\varepsilon \in (0, 1/240]$ , функция  $f(\tilde{x}) \in K(n)$ , и  $S$  – любая схема в базисе  $\{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$ , реализующая функцию  $f$ . Тогда  $P(S) \geq 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$ .

Из теорем 1 и 2 следует, что в базисе  $\{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$  при  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  любая схема из ФЭ, реализующая функцию  $f(\tilde{x}) \in K(n)$ , является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной  $5\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Теорема 3.** [4]. При  $\varepsilon \in (0, 1/128]$  любую булеву функцию можно реализовать такой схемой  $S$ , что  $P(S) \leq 3\varepsilon + 32\varepsilon^2$ .

**Теорема 4** [4]. Пусть  $\varepsilon \in (0, 1/6]$ , функция  $f(\tilde{x}) \in K(n)$ , и  $S$  – любая схема в базисе  $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ , реализующая функцию  $f$ . Тогда  $P(S) \geq 3\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3$ .

Из теорем 3 и 4 следует, что в базисе  $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$  любая схема из ФЭ, реализующая функцию  $f(\tilde{x}) \in K(n)$ , является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной  $3\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Для неветвящихся программ с абсолютно надежным оператором условной остановки справедливы следующие утверждения.

**Лемма 1.** В базисе  $B$  при  $\varepsilon \in (0, 1/2)$  программа  $Pr_\varphi$  (рис. 1) реализует функцию  $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee x_3x_4$  с ненадежностью  $N(Pr_\varphi) \leq 2\varepsilon$ , а вероятности появления нуля и единицы  $P_0(Pr_\varphi, \tilde{b})$  и  $P_1(Pr_\varphi, \tilde{b})$  на выходе программы, где  $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ , приведены в табл. 1.

$Pr_\varphi$  :

1)  $z = x_1 \& x_2$

2)  $stop(z)$

3)  $z = x_3 \& x_4$

Рис. 1



Таблица 1

Наборы $\tilde{b}$	$P_0^I$	$P_0^{II}$	$P_0(Pr_\varphi, \tilde{b})$	$P_1^I$	$P_1^{II}$	$P_1(Pr_\varphi, \tilde{b})$
(1, 1, 1, 1)	0	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2$	$1 - \varepsilon$	$\varepsilon(1 - \varepsilon)$	$1 - \varepsilon^2$
(0, 1, 1, 1) (1, 0, 1, 1) (0, 0, 1, 1)	0	$(1 - \varepsilon)\varepsilon$	$\varepsilon - \varepsilon^2$	$\varepsilon$	$(1 - \varepsilon)^2$	$1 - \varepsilon + \varepsilon^2$
(1, 1, 0, 1) (1, 1, 1, 0) (1, 1, 0, 0)	0	$\varepsilon(1 - \varepsilon)$	$\varepsilon - \varepsilon^2$	$1 - \varepsilon$	$\varepsilon^2$	$1 - \varepsilon + \varepsilon^2$
(0, 1, 0, 1) (0, 1, 1, 0) (1, 0, 0, 1) (1, 0, 1, 0) (0, 0, 0, 1) (0, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 0) (0, 1, 0, 0) (0, 0, 0, 0)	0	$(1 - \varepsilon)^2$	$(1 - \varepsilon)^2$	$\varepsilon$	$(1 - \varepsilon)\varepsilon$	$2\varepsilon - \varepsilon^2$

**Доказательство.** Программа  $Pr_\varphi$  имеет один выход. Однако в ней можно выделить две подпрограммы  $Pr_\varphi^I$  и  $Pr_\varphi^{II}$ . Если стоп-оператор срабатывает, то выполнение программы прекращается, и на выход программы идет значение, вычисленное до останова. В этой ситуации результат работы программы совпадает с результатом работы первой подпрограммы  $Pr_\varphi^I$ . Если же оператор условной остановки не срабатывает, выполнение программы продолжается, и на выход пойдет значение, вычисленное после оператора останова. В этом случае результат работы программы совпадает с результатом работы второй подпрограммы  $Pr_\varphi^{II}$ . Вычисляя вероятность ошибки в программе  $Pr_\varphi$  на том или ином наборе, по формуле полной вероятности необходимо суммировать вероятности ошибок первой и второй подпрограмм.

Вычислим и оценим вероятности  $P_0^I, P_1^I, P_0^{II}, P_1^{II}$  появления нуля и единицы на выходах подпрограмм программы  $Pr_\varphi$  при всех входных наборах  $\tilde{b}$ .

Пусть входной набор  $\tilde{b}$  равен (1, 1, 1, 1), тогда

$$P_0^I = 0; P_0^{II} = \varepsilon \cdot \varepsilon;$$

$$P_1^I = 1 - \varepsilon; P_1^{II} = \varepsilon \cdot (1 - \varepsilon).$$

Следовательно,  $P_0(Pr_\varphi, \tilde{b}) = \varepsilon^2, P_1(Pr_\varphi, \tilde{b}) = \varepsilon^2$ .

Пусть входной набор  $\tilde{b}$  равен одному из наборов (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1) или (0, 0, 1, 1), тогда

$$P_0^I = 0; P_0^{II} = (1 - \varepsilon) \cdot \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^2;$$

$$P_1^I = \varepsilon; P_1^{II} = (1 - \varepsilon)^2.$$

Следовательно,  $P_0(Pr_\varphi, \tilde{b}) = \varepsilon - \varepsilon^2$ ,  $P_1(Pr_\varphi, \tilde{b}) = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2$ .

Пусть входной набор  $\tilde{b}$  равен одному из наборов  $(1, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 0)$  или  $(1, 1, 0, 0)$ , тогда

$$P_0^I = 0; P_0^{II} = \varepsilon \cdot (1 - \varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2;$$

$$P_1^I = 1 - \varepsilon; P_1^{II} = \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2.$$

Следовательно,  $P_0(Pr_\varphi, \tilde{b}) = \varepsilon - \varepsilon^2$ ,  $P_1(Pr_\varphi, \tilde{b}) = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2$ .

Легко проверить, что на рассмотренных наборах ошибкой будет появление 0 на выходе программы. Максимальная вероятность ошибки удовлетворяет неравенству  $P_0(Pr_\varphi, \tilde{b}) \leq \varepsilon$ .

Пусть входной набор  $\tilde{b}$  равен одному из наборов  $(0, 1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$  или  $(0, 0, 0, 0)$ , тогда

$$P_1^I = \varepsilon; P_1^{II} = (1 - \varepsilon) \cdot \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^2;$$

$$P_0^I = 0; P_0^{II} = (1 - \varepsilon)^2.$$

Следовательно,  $P_1(Pr_\varphi, \tilde{b}) = 2\varepsilon - \varepsilon^2$ ,  $P_0(Pr_\varphi, \tilde{b}) = (1 - \varepsilon)^2$ .

Заметим, что на рассмотренных наборах ошибкой будет появление 1 на выходе программы. Вероятность ошибки удовлетворяет неравенству  $P_1(Pr_\varphi, \tilde{b}) \leq 2\varepsilon$ .

Таким образом, ненадежность программы  $N(Pr_\varphi) \leq 2\varepsilon$ .

*Лемма 1 доказана.*

Из леммы 1 следует, что для реализации функции  $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee x_3x_4$  программой с условной остановкой достаточно лишь оператора конъюнкции  $\&$ , при этом ненадежность программы  $N(Pr_\varphi) \leq 2\varepsilon$ .

Используя лемму 1, докажем теорему 5.

**Теорема 5.** *В базисе  $B$  при  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  любую функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можно реализовать такой программой  $Pr_f$  с абсолютно надежным оператором условной остановки, что  $N(Pr_f) \leq 2\varepsilon + 96\varepsilon^2 \leq 2,1\varepsilon$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – произвольная булева функция. По теореме 1 ее можно реализовать схемой  $S$  с ненадежностью  $P(S) \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ . Обозначим  $P_0(S, \tilde{a})$ ,  $P_1(S, \tilde{a})$  – вероятности ошибок схемы  $S$ . Используя схему  $S$ , построим для  $f$  неветвящуюся программу с оператором условной остановки  $Pr_f$  (рис. 2).

Вычислим и оценим вероятности ошибок на выходе программы  $Pr_f$ .

Пусть набор  $\tilde{a}$  такой, что  $f(\tilde{a}) = 0$ . Тогда

$$P_1(Pr_f, \tilde{a}) = (1 - P_1(S, \tilde{a}))^4 (2\varepsilon - \varepsilon^2) + 4(1 - P_1(S, \tilde{a}))^3 P_1(S, \tilde{a}) (2\varepsilon - \varepsilon^2) +$$

$$\begin{aligned}
&+(1 - P_1(S, \tilde{a}))^2 P_1^2(S, \tilde{a})(4(2\varepsilon - \varepsilon^2) + 2(1 - \varepsilon + \varepsilon^2)) + \\
&+4(1 - P_1(S, \tilde{a}))P_1^3(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon + \varepsilon^2) + P_1^4(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon^2) \leq \\
&\leq 2\varepsilon + 8P(S)\varepsilon + 2P^2(S).
\end{aligned}$$

$Pr_f$  :

$$1) y_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n)[S]$$

$$2) y_2 = f(x_1, x_2, \dots, x_n)[S]$$

$$3) y_3 = f(x_1, x_2, \dots, x_n)[S]$$

$$4) y_4 = f(x_1, x_2, \dots, x_n)[S]$$

$$5) z = y_1 \& y_2$$

$$6) stop(z)$$

$$7) z = y_3 \& y_4$$

Рис. 2

Поскольку  $P(S) \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$  и  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ , получаем неравенство  $P_1(Pr_f, \tilde{a}) \leq 2\varepsilon + 96\varepsilon^2 \leq 2,1\varepsilon$ .

Пусть набор  $\tilde{a}$  такой, что  $f(\tilde{a}) = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned}
P_0(Pr_f, \tilde{a}) &= (1 - P_0(S, \tilde{a}))^4 \varepsilon^2 + 4(1 - P_0(S, \tilde{a}))^3 P_0(S, \tilde{a})(\varepsilon - \varepsilon^2) + \\
&+(1 - P_0(S, \tilde{a}))^2 P_0^2(S, \tilde{a})(2(\varepsilon - \varepsilon^2) + 4(1 - \varepsilon)^2) + \\
&+4(1 - P_0(S, \tilde{a}))P_0^3(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon)^2 + P_0^4(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon)^2 \leq \\
&\leq \varepsilon^2 + 4P(S)\varepsilon + 4P^2(S).
\end{aligned}$$

Поскольку  $P(S) \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$  и  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ , получаем неравенство  $P_0(Pr_f, \tilde{a}) \leq 130\varepsilon^2$ .

Выбирая из полученных для вероятностей ошибок значений максимальное, видим, что ненадежность программы  $N(Pr_f)$  удовлетворяет неравенству  $N(Pr_f) \leq 2\varepsilon + 96\varepsilon^2 \leq 2,1\varepsilon$ .

*Теорема 5 доказана.*

Проведенные исследования показывают, что в базисах, содержащих конъюнкцию  $x_1 \& x_2$ , в том числе в  $\{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$  и  $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ , при  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  все функции можно реализовать программами с абсолютно надежным оператором условной остановки, которые функционируют с ненадежностью не больше  $2\varepsilon + 96\varepsilon^2$ , в то время как ненадежность асимптотически оптимальных схем, например в базисе  $\{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$ , асимптотически равна  $5\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , в базисе  $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$  —  $3\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 2 Неветвящиеся программы с ненадежным оператором условной остановки

Будем предполагать, что оператор условной остановки ненадежен. Он может быть подвержен двум типам неисправностей: первый – на вход стоп-оператора поступает единица, но при этом он не прекращает работы программы; второй – на вход оператора условной остановки поступает ноль, и он срабатывает, прекращая работу программы. Обозначим  $\eta$  – вероятность возникновения неисправности первого рода, т.е. вероятность того, что стоп-оператор не сработает при поступлении 1 на вход. Пусть  $\delta$  – вероятность возникновения неисправности второго рода, а именно вероятность остановки при поступлении 0 на вход стоп-оператора. Считаем, что  $\delta, \eta \in (0, 1/2)$ .

Для неветвящихся программ с ненадежным оператором условной остановки справедливы следующие утверждения.

**Лемма 2.** В базисе  $B$  при  $\varepsilon \in (0, 1/2)$  программа  $Pr_\varphi$  (рис. 1) реализует функцию  $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee x_3x_4$  с ненадежностью  $N(Pr_\varphi) \leq \varepsilon + \max\{\varepsilon, \delta, \eta\}$ .

**Доказательство.** Вычислим и оценим вероятности  $P_0^I, P_1^I, P_0^{II}, P_1^{II}$  появления нуля и единицы на выходах подпрограмм программы  $Pr_\varphi$  при всех входных наборах  $\tilde{b}$ .

Пусть входной набор  $\tilde{b}$  равен  $(1, 1, 1, 1)$ , тогда

$$\begin{aligned} P_0^I &= \varepsilon\delta; \quad P_0^{II} = [\varepsilon(1-\delta) + (1-\varepsilon)\eta]\varepsilon; \\ P_1^I &= (1-\varepsilon)(1-\eta); \quad P_1^{II} = [(1-\varepsilon)\eta + \varepsilon(1-\delta)](1-\varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P_0(Pr_\varphi, \tilde{b}) &= P_0^I + P_0^{II} = \varepsilon^2 + \varepsilon\delta - \varepsilon^2\delta + \varepsilon\eta - \varepsilon^2\eta \leq \varepsilon^2 + \varepsilon(\delta + \eta) \leq \varepsilon + \varepsilon^2 \leq 2\varepsilon; \\ P_1(Pr_\varphi, \tilde{b}) &= P_1^I + P_1^{II} = 1 - \varepsilon^2 - \varepsilon\delta - \varepsilon\eta + \varepsilon^2\delta + \varepsilon^2\eta. \end{aligned}$$

Пусть входной набор  $\tilde{b}$  равен одному из наборов  $(0, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 1)$  или  $(0, 0, 1, 1)$ , тогда

$$\begin{aligned} P_0^I &= (1-\varepsilon)\delta; \quad P_0^{II} = [(1-\varepsilon)(1-\delta) + \varepsilon\eta]\varepsilon; \\ P_1^I &= \varepsilon(1-\eta); \quad P_1^{II} = [\varepsilon\eta + (1-\varepsilon)(1-\delta)](1-\varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P_0(Pr_\varphi, \tilde{b}) &= P_0^I + P_0^{II} = \varepsilon + \delta - 2\varepsilon\delta - \varepsilon^2 + \varepsilon^2\delta + \varepsilon^2\eta = \\ &= \varepsilon + \delta + \varepsilon^2(\eta - 1) + \varepsilon\delta(\varepsilon - 2) \leq \varepsilon + \delta; \\ P_1(Pr_\varphi, \tilde{b}) &= P_1^I + P_1^{II} = 1 - \varepsilon - \delta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\delta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta. \end{aligned}$$

Пусть входной набор  $\tilde{b}$  равен одному из наборов  $(1, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 0)$  или  $(1, 1, 0, 0)$ , тогда

$$P_0^I = \varepsilon\delta; P_0^{II} = [\varepsilon(1-\delta) + (1-\varepsilon)\eta](1-\varepsilon);$$

$$P_1^I = (1-\varepsilon)(1-\eta); P_1^{II} = [(1-\varepsilon)\eta + \varepsilon(1-\delta)]\varepsilon.$$

Следовательно,

$$P_0(Pr_\varphi, \tilde{b}) = P_0^I + P_0^{II} = \varepsilon + \eta - \varepsilon^2 - 2\varepsilon\eta + \varepsilon^2\delta + \varepsilon^2\eta =$$

$$= \varepsilon + \eta + \varepsilon^2(\delta - 1) + \varepsilon\delta(\varepsilon - 2) \leq \varepsilon + \eta;$$

$$P_1(Pr_\varphi, \tilde{b}) = P_1^I + P_1^{II} = 1 - \varepsilon - \eta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\eta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta.$$

Легко проверить, что на рассмотренных наборах ошибкой будет появление 0 на выходе программы. Максимальная вероятность ошибки удовлетворяет неравенству  $P_0(Pr_\varphi, \tilde{b}) \leq \varepsilon + \max\{\delta, \eta\}$ .

Пусть входной набор  $\tilde{b}$  равен одному из наборов (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) или (0, 0, 0, 0), тогда

$$P_1^I = \varepsilon(1-\eta); P_1^{II} = [\varepsilon\eta + (1-\varepsilon)(1-\delta)]\varepsilon;$$

$$P_0^I = (1-\varepsilon)\delta; P_0^{II} = [(1-\varepsilon)(1-\delta) + \varepsilon\eta](1-\varepsilon).$$

Следовательно,

$$P_1(Pr_\varphi, \tilde{b}) = P_1^I + P_1^{II} = 2\varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon\delta - \varepsilon\eta + \varepsilon^2\delta + \varepsilon^2\eta =$$

$$= 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon\delta(\varepsilon - 1) + \varepsilon\eta(\varepsilon - 1) \leq 2\varepsilon;$$

$$P_0(Pr_\varphi, \tilde{b}) = P_0^I + P_0^{II} = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon\delta + \varepsilon\eta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta.$$

Заметим, что на рассмотренных наборах ошибкой будет появление 1 на выходе программы. Вероятность ошибки удовлетворяет неравенству  $P_1(Pr_\varphi, \tilde{b}) \leq 2\varepsilon$ .

Таким образом, ненадежность программы  $N(Pr_\varphi) \leq \varepsilon + \max\{\varepsilon, \delta, \eta\}$ .

*Лемма 2 доказана.*

Используя лемму 2, докажем теорему 6.

**Теорема 6.** В базисе  $B$  при  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  любую функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можно реализовать такой программой  $Pr_f$  (рис. 2) с ненадежным оператором условной остановки, что  $N(Pr_f) \leq \max\{2\varepsilon + 96\varepsilon^2, 130\varepsilon^2 + 11,4\varepsilon(\delta + \eta)\}$ .

**Доказательство.** Докажем теорему 6 аналогично теореме 5. Вычислим и оценим вероятности ошибок на выходе программы  $Pr_f$  (рис. 2).

Пусть набор  $\tilde{a}$  такой, что  $f(\tilde{a}) = 0$ . Тогда

$$P_1(Pr_f, \tilde{a}) = (1 - P_1(S, \tilde{a}))^4 (2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon\delta(\varepsilon - 1) + \varepsilon\eta(\varepsilon - 1)) +$$

$$+ 4(1 - P_1(S, \tilde{a}))^3 P_1(S, \tilde{a}) (2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon\delta(\varepsilon - 1) + \varepsilon\eta(\varepsilon - 1)) +$$

$$\begin{aligned}
 &+(1 - P_1(S, \tilde{a}))^2 P_1^2(S, \tilde{a})(4(2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon\delta(\varepsilon - 1) + \varepsilon\eta(\varepsilon - 1)) + \\
 &\quad + 2(1 - \varepsilon - \delta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\delta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta)) + \\
 &+(1 - P_1(S, \tilde{a}))P_1^3(S, \tilde{a})(2(1 - \varepsilon - \delta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\delta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta) + \\
 &\quad + 2(1 - \varepsilon - \eta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\eta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta)) + \\
 &+ P_1^4(S, \tilde{a})(1 - \varepsilon - \delta + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\delta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta) \leq 2\varepsilon + 8P(S)\varepsilon + 2P^2(S).
 \end{aligned}$$

Поскольку  $P(S) \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$  и  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ , получаем неравенство  $P_1(Pr_f, \tilde{a}) \leq 2\varepsilon + 96\varepsilon^2 \leq 2,1\varepsilon$ .

Пусть набор  $\tilde{a}$  такой, что  $f(\tilde{a}) = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 &P_0(Pr_f, \tilde{a}) = (1 - P_0(S, \tilde{a}))^4 (\varepsilon^2 + \varepsilon\delta - \varepsilon^2\delta + \varepsilon\eta - \varepsilon^2\eta) + \\
 &+(1 - P_0(S, \tilde{a}))^3 P_0(S, \tilde{a})(2(\varepsilon + \delta + \varepsilon^2(\eta - 1) + \varepsilon\delta(\varepsilon - 2)) + \\
 &\quad + 2(\varepsilon + \eta + \varepsilon^2(\delta - 1) + \varepsilon\eta(\varepsilon - 2))) + \\
 &+(1 - P_0(S, \tilde{a}))^2 P_0^2(S, \tilde{a})(\varepsilon + \delta + \varepsilon^2(\eta - 1) + \varepsilon\delta(\varepsilon - 2)) + \\
 &\quad + (\varepsilon + \eta + \varepsilon^2(\delta - 1) + \varepsilon\eta(\varepsilon - 2)) + \\
 &\quad + 4(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon\delta + \varepsilon\eta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta)) + \\
 &+ 4(1 - P_0(S, \tilde{a}))P_0^3(S, \tilde{a})(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon\delta + \varepsilon\eta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta) + \\
 &\quad + P_0^4(S, \tilde{a})(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon\delta + \varepsilon\eta - \varepsilon^2\delta - \varepsilon^2\eta) \leq \\
 &\leq \varepsilon^2 + \varepsilon(\delta + \eta) + 2P(S)(2\varepsilon + \delta + \eta) + 4P^2(S).
 \end{aligned}$$

Поскольку  $P(S) \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ , получаем неравенство  $P_0(Pr_f, \tilde{a}) \leq 130\varepsilon^2 + 11,4\varepsilon(\delta + \eta)$ .

Таким образом, ненадежность программы  $N(Pr_f)$  удовлетворяет неравенству  $N(Pr_f) \leq \max\{2\varepsilon + 96\varepsilon^2, 130\varepsilon^2 + 11,4\varepsilon(\delta + \eta)\}$ .

*Теорема 6 доказана.*

**Следствие 1.** Если  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  и  $\delta + \eta \leq 0,16$ , то любую функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можно реализовать такой программой  $Pr_f$  (рис. 2) с ненадежным оператором условной остановки, что  $N(Pr_f) \leq 2\varepsilon + 96\varepsilon^2$ .

**Доказательство.** Из теоремы 6 известно, что  $N(Pr_f) \leq \max\{2\varepsilon + 96\varepsilon^2, 130\varepsilon^2 + 11,4\varepsilon(\delta + \eta)\}$ .

Поскольку  $\varepsilon \in (0, 1/960]$  и  $\delta + \eta \leq 0,16$ , получаем

$$130\varepsilon^2 + 11,4\varepsilon(\delta + \eta) \leq 0,135\varepsilon + 11,4\varepsilon \cdot 0,16 \leq 2\varepsilon \leq 2\varepsilon + 96\varepsilon^2.$$

Таким образом,

$$\max\{2\varepsilon + 96\varepsilon^2, 130\varepsilon^2 + 11,4\varepsilon(\delta + \eta)\} = 2\varepsilon + 96\varepsilon^2.$$

*Следствие 1 доказано.*

Проведенные исследования показывают, что в базисах, содержащих конъюнкцию  $x_1 \& x_2$  при  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ , любую функцию  $f$  можно реализовать такой программой с ненадежным оператором условной остановки, что  $N(Pr_f) \leq \max\{2\varepsilon + 96\varepsilon^2, 130\varepsilon^2 + 11,4\varepsilon(\delta + \eta)\}$ . В частности, если  $\delta + \eta \leq 0,17$  или  $\delta = \eta = \varepsilon$ , то  $N(Pr_f) \leq 2\varepsilon + 96\varepsilon^2$ . Ненадежность асимптотически оптимальных схем, например в базисе  $\{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$ , асимптотически равна  $5\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### Список литературы

1. **Чашкин, А. В.** О среднем времени вычисления значений булевых функций / А. В. Чашкин // Дискретный анализ и исследование операций. – 1997. – Т. 4. – № 1. – С. 60–78.
2. **Алехина, М. А.** О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных / М. А. Алехина, А. В. Васин // Ученые записки Казанского государственного университета. – 2009. – Т. 151. – Кн. 2. – С. 25–35. – (Физико-математические науки).
3. **Васин, А. В.** Об асимптотически оптимальных схемах в базисе  $\{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$  / А. В. Васин // Дискретный анализ и исследование операций. – Новосибирск : Изд-во института математики, 2009. – Т. 16. – № 6. – С. 12–22.
4. **Васин, А. В.** Об асимптотически оптимальных схемах в базисе  $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$  при инверсных неисправностях на выходах элементов / А. В. Васин // Материалы седьмой международной молодежной школы по дискретной математике и ее приложениям. – М. : Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ им. М. В. Ломоносова, 2009. – С. 15–19.

---

**Грабовская Светлана Михайловна**  
ассистент, кафедра дискретной  
математики, Пензенский  
государственный университет

**Grabovskaya Svetlana Mikhailovna**  
Assistant, sub-department of discrete  
mathematics, Penza State University

E-mail: dm@pnzgu.ru

---

УДК 519.718

**Грабовская, С. М.**

**Синтез надежных неветвящихся программ с условной остановкой в полном конечном базисе, содержащем  $x_1 \& x_2$**  / С. М. Грабовская // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 85–95.

## АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

*Аннотация.* Исследуются системы управления объектами, которые могут работать в нескольких режимах, причем переход от одного режима к другому осуществляется автоматически без передачи информации в устройство управлениями. Каждый режим описывается своей системой дифференциальных или разностных уравнений. Получены достаточные условия одновременной стабилизации систем.

*Ключевые слова:* устойчивость, стабилизация, управление, обыкновенные дифференциальные уравнения.

*Abstract.* Algorithms for control and stabilization of discrete systems. Investigated the control systems which can work in the some different conditions. Transfer from one condition to another condition take place automatically. An information do not send to control device. Each condition of the control system are described by separate system of ordinary differential equations or system of difference equations. Given the sufficient conditions for simultaneous stabilization of all control systems.

*Keywords:* stability, stabilization, control, ordinary differential equations, difference equations.

### 1 Постановка задачи

При разработке систем управления часто возникает следующая задача.

**Задача.** Имеется объект, который может работать в нескольких режимах, причем переход от одного известного режима к другому может осуществляться автоматически без передачи соответствующей информации в устройства управления. В частности, такой переход может быть вызван отказом какого-нибудь элемента системы. Необходимо выбрать управление, обеспечивающее устойчивость системы в любом из возможных режимов.

В монографии [1] эта задача сформулирована в виде следующих проблем.

**Проблема 1.** Имеется  $m$  одномерных объектов с передаточными функциями:

$$G_i(s) = \frac{A_i(s)}{B_i(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Существует ли регулятор

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

который одновременно стабилизирует все эти объекты?

В случае  $m = 1, 2$ , эта проблема полностью решена. При  $m \geq 3$  ее решение неизвестно.

В матричном варианте эта проблема формулируется следующим образом.



**Проблема 2.** Даны  $m$  линейных систем в пространстве состояний:

$$\frac{dx}{dt} = A_i x + B_i u, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Существует ли один регулятор в форме обратной связи по состоянию

$$u = Kx,$$

стабилизирующий все эти системы.

В монографии [1] указаны два достаточных условия нахождения матрицы  $K$ .

В данной работе исследуется ряд систем управления, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями. Для этих систем получены достаточные условия одновременной стабилизации.

Исследование будем проводить в пространстве  $(R_n - n)$ -мерных векторов  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . В качестве нормы в пространстве  $R_n$  можно взять одну из следующих норм:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left[ \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right]^{1/2}.$$

Так как исследование устойчивости проводится совершенно аналогично в каждом из этих пространств, то в работе норма не конкретизируется.

В работе используются следующие обозначения:  $B(0, \delta)$  – шар радиуса  $\delta$  с центром в начале координат пространства  $R_n$ ;  $S(0, \delta)$  – сфера с радиусом  $\delta$ ;  $\Lambda(A)$  – логарифмическая норма матрицы  $A$ , определяемая формулой

$$\Lambda(A) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}.$$

## 2 Одновременная стабилизация систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим  $m$  систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_i(t)x(t) + B_i(t)u(t), \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, m$ .

Здесь  $A_i(t) = \{a_{kl}^i(t)\}$ ,  $B_i(t) = \{b_{kl}^i(t)\}$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, n$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Управление системами уравнений (1) задается матрицей  $K(t)$ :

$$u(t) = K(t)x(t).$$

Требуется найти матрицу  $K(t)$  (одну для всех систем уравнений (1)), стабилизирующую к нулю тривиальные решения всех систем уравнений (1) (при  $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Укажем достаточное условие одновременной стабилизации систем дифференциальных уравнений (1).

**Теорема 1.** Пусть  $K(t), A_i(t), B_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) – непрерывные функции при  $t_0 \leq t < \infty$ . Пусть для всех  $i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) и при всех значениях  $t$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) выполнены условия

$$\Lambda(A_i(t) + B_i(t)K(t)) \leq -\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Тогда матрица  $K(t)$  осуществляет одновременную стабилизацию систем уравнений (1).

**Доказательство.** Предположим, что выполнены условия теоремы. Покажем, что матрица  $K(t)$  осуществляет одновременную асимптотическую стабилизацию всех систем уравнений (1). Вначале покажем, что осуществляется стабилизация всех систем уравнений (1). Для этого достаточно показать, что траектории  $X_i(t) = (x_1^i(t), \dots, x_n^i(t))$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , начавшиеся в шаре  $R(0, \delta)$ , не покидают этого шара. Предположим противное. Пусть в момент времени  $T_0$   $j$ -я траектория  $X_j(t) = (x_1^j(t), \dots, x_n^j(t))$  покидает сферу  $S(0, \delta)$ , проходя через точку  $X_j(T_0)$ .

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = C_j(t)x(t), \quad C_j(t) = A_j(t) + B_j(t)K(t), \quad (2)$$

с начальным условием

$$x(T_0) = X_j(T_0). \quad (3)$$

Решение задачи Коши (2), (3) можно представить в операторной форме:

$$x(t) = e^{C(T_0)(t-T_0)} X_j(T_0) + \int_{T_0}^t e^{C(T_0)(t-s)} (C(t) - C(T_0))x(s) ds.$$

Переходя к нормам, имеем

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq e^{\Lambda(C(T_0))(t-T_0)} \|X_j(T_0)\| + \\ &+ \int_{T_0}^t e^{\Lambda(C(T_0))(t-s)} \|C(t) - C(T_0)\| \|x(s)\| ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Выберем столь малый промежуток времени  $\Delta T_0$ , что при  $t \in [T_0, T_1]$   $T_1 = T_0 + \Delta T_0$ ,

$$\|C(t) - C(T_0)\| \leq \frac{\alpha}{2} \|X_j(T_0)\|.$$

Введем функцию  $\varphi(t) = e^{-\Lambda(C(T_0))t} \|x(t)\|$ . Тогда неравенство (4) можно представить в виде

$$\varphi(t) \leq \varphi(T_0) + \frac{\alpha}{2} \int_{T_0}^t \varphi(s) ds. \quad (5)$$

Применяя к (5) неравенство Гронуолла – Беллмана и возвращаясь к нормам, убеждаемся в том, что траектория  $X_j(t)$  не покидает сферу  $S(0, \delta)$  в момент времени  $T_0$ . Устойчивость доказана. Для доказательства асимптотической устойчивости достаточно повторить рассуждения, приведенные в монографии [2].

Теорема доказана.

**Замечание.** Для одновременной стабилизации системы (1) достаточно выполнение условий

$$\Lambda(A_i(t) + B_i(t)K(t)) \leq -\alpha(t), \quad \alpha(t) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Исследуем одновременную стабилизацию  $m$  систем нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = A_i(t, x(t)) + B_i(t)u(t), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

при общем управлении

$$u(t) = K(t)x(t). \quad (7)$$

Здесь  $A_i(t, x(t))$  – вектор-столбец  $A_i(t, x(t)) = (a_1^i(t, x(t)), \dots, a_n^i(t, x(t)))$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $K(t) = \{k_{ij}(t)\}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $B_i(t) = \{b_{kl}^i(t)\}$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Каждому элементу  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $y \in R(0, \delta)$ , поставим в соответствие матрицу  $D_j(t, y) = \{d_{kl}^j(t, y)\}$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , где

$$d_{kl}^j(t, y) = \begin{cases} \alpha_{kl}^j \frac{a_k^j(t, y_1, \dots, y_{l-1}, y_l, y_{l+1}, \dots, y)}{y_l}, & y_l \neq 0, \\ 0, & y_l = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_{kl}^j \geq 0; \quad \alpha_{kl}^j = 0, \text{ если } y_l = 0; \quad \sum_{l=1}^n \alpha_{kl}^j = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Возможны и другие представления вектор-функции  $A_i(t, x(t))$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , ряд которых описан в монографии [2].

**Теорема 2.** Пусть  $A_i(t, 0) \equiv 0$  при  $t \in [t_0, \infty)$ , функции  $a_i^j(t, z)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , непрерывно дифференцируемы по обеим переменным. Пусть существует непрерывная матрица  $K(t)$  такая, что при всех  $t \in [t_j, \infty)$ ,  $y \in R(0, \delta)$  справедливы неравенства

$$\Lambda(D_j(t, y) + B_j(t)K(t)) \leq -\alpha, \quad \alpha > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Тогда матрица  $K(t)$  осуществляет одновременную асимптотическую стабилизацию систем уравнений (6) в области  $R(0, \delta)$ .

**Доказательство.** Доказательство проведем от противного. Пусть существует такая матрица  $K(t)$ , что выполнены условия (8), но при  $t = T_0$ , траектория  $X_j$  системы уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_j(t, x(t)) + B_j(t)K(t)x(t), \quad 1 \leq j \leq m, \quad (9)$$

покидает шар  $R(0, \delta)$ , проходя через точку  $X_j(T_0)$ . Тогда систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_j(t, x(t)) + B_j(t)K(t)x(t)$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & D_j(T_0, X_j(T_0))x(t) + A_j(t, x(t)) - \\ & - D_j(T_0, X_j(T_0))x(t) + B_j(t)K(t)x(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим через  $\Delta T_0$  промежуток времени  $[T_0, T_1]$ ,  $T_1 = T_0 + \Delta T_0$ , в течение которого

$$\|A_j(t, x(t)) - D_j(T_0, X_j(T_0))x(t)\| \leq \frac{\alpha}{4} \|x(t)\|;$$

$$\|B_j(t) - B_j(T_0)\| \leq \frac{\alpha}{4} \|x(t)\|;$$

$$\|K(t) - K(T_0)\| \leq \frac{\alpha}{4} \|x(t)\|.$$

Введем обозначение

$$C(T_0) = D_j(T_0, X_j(T_0)) + B_j(T_0)K(T_0).$$

Тогда решение уравнения (10) в операторной форме имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) = & e^{C(T_0)(t-T_0)} x(t_0) + \int_{T_0}^t C(T_0)(t-s) (A_j(s, x(s)) + \\ & + B_j(s)K(s)x(s) - C(T_0)x(s)) ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем функцию  $\varphi(t) = e^{C(T_0)t} x(t)$  и, переходя к нормам, имеем

$$\varphi(t) \leq \varphi(T_0) + \frac{3}{4} \alpha \int_{T_0}^t \varphi(s) ds.$$

Используя неравенство Грануолла – Беллмана и возвращаясь к нормам  $\|x(t)\|$ , доказываем, что траектория  $X_j(t)$  в момент времени  $T_0$  не покидает шар  $R(0, \delta)$ .

Теорема доказана.

**Замечание 1.** Для одновременной асимптотической стабилизации системы уравнений (7) нужно дополнительно потребовать, чтобы искомая матрица  $K(t)$ , была равномерно непрерывной.

### 3 Одновременная стабилизация систем разностных уравнений

Рассмотрим  $m$  систем разностных уравнений:

$$x(n+1) = A_i(n)x(n) + B_i(n)u(n), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

Здесь  $A_i(n) = \{a_{kl}^i(n)\}$ ,  $B_i(n) = \{b_{kl}^i(n)\}$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m$ .

Управление системами уравнений (12) задается матрицей  $K(n)$ :

$$u(n) = K(n)x(n). \quad (13)$$

Системы уравнений (12) будем рассматривать при начальном условии

$$x(n_0) = x_0, \quad (14)$$

причем каждая система уравнений может иметь свое начальное условие.

Требуется найти матрицу  $K(n)$  (одну для всех систем уравнений (12)) стабилизирующую к нулю тривиальные решения всех систем уравнений (12) при  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Укажем достаточное условие одновременной стабилизации систем разностных уравнений (12).

Известно [3], что в гильбертовом пространстве  $H$  линейный, вполне непрерывный оператор  $A$  может быть представлен в виде  $A = UT$ , где  $T$  – положительный квадратный корень из  $A^*A$ ;  $U$  – частично изометрический оператор, отображающий область значений оператора  $T$  на  $H$ . Тогда

$$\|Ax\| = (Ax, Ax)^{1/2} = (UTx, UTx)^{1/2} = (Tx, Tx)^{1/2} = \|Tx\| \leq \max_j s_j(A) \|x\|,$$

где  $s_j(A) - s$  – числа оператора  $A$ , т.е. собственные значения оператора  $T$ .

Из этой оценки следует, что  $\|A^n\| \leq s_*^n(A)$ , где  $s_*(A) = \max_j s_j(A)$ .

**Теорема 3.** Если существует такая матрица  $K(n)$ , что для  $V(n) \geq n_0$

$$\prod_{k=n_0}^n s_*(A_j(k) + B_j(k)K(k)) \leq C = \text{const},$$

$j = 1, 2, \dots, m$ , то тривиальное решение системы уравнений (12) стабилизируется к нулю.

**Теорема 4.** Пусть существует матрица  $K(n)$  такая, что выполнены следующие условия:

- 1) при всех  $n$ ,  $n \geq n_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , спектр матриц  $A_i(n) + B_i(n)K(n)$  не содержит нуля;  
 2) при каждом  $n \geq n_0$  выполняется условие

$$\prod_{k=n_0}^n e^{\Lambda(\ln(A_j(k) + B_j(k)K(k)))} \leq C = \text{const},$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=n_0}^n \Lambda(\ln(A_j(k) + B_j(k)K(k))) \leq C = \text{const},$$

$j = 1, 2, \dots, m$ .

Тогда система разностных уравнений (12) одновременно стабилизируется к нулевому решению.

Доказательства теорем 3 и 4 являются распространением теорем 1 и 2 на разностные уравнения. Распространение критериев устойчивости решений дифференциальных уравнений на разностные уравнения описано в главе 3 монографии [2].

Рассмотрим  $m$  систем нелинейных разностных уравнений

$$x(k+1) = A_i(k, x(k)) + B_i(k)u(k), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (15)$$

управление которыми задается выражением

$$u(k) = K(k)x(k). \quad (16)$$

Здесь

$$A_i(k, x(k)) = (a_1^i(k, x(k)), \dots, a_n^i(k, x(k)));$$

$$B_i(k) = \{b_{j,l}^i(k)\}, \quad j, l = 1, 2, \dots, n;$$

$$x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k)).$$

Ставится задача нахождения матрицы  $K(k)$ , осуществляющей одновременную стабилизацию всех уравнений системы (15) к тривиальному решению.

Систему уравнений (15) будем исследовать в предположении, что начальные условия всех уравнений принадлежат шару  $B(0, \delta)$ .

Пусть  $z = (z_1, \dots, z_n)$  – вектор, расположенный в шаре  $B(0, \delta)$ . Каждую из функций  $a_j^i(k, z_1, \dots, z_n)$  представим следующим образом:

$$a_j^i(k, z_1, \dots, z_n) = \sum_{v=1}^n \alpha_{j,v}^i \frac{a_{j,v}^i(k, z_1, \dots, z_n)}{z_v} z_v,$$

где  $\sum$  означает суммирование по  $v$  таким, что  $z_v \neq 0$ ;  $\alpha_{j,v}^i \geq 0$ ;

$$\sum_{v=1}^n \alpha_{j,v}^i = 1.$$

Каждой вектор-функции  $A_i(k, x(k))$  поставим в соответствие матрицу  $\bar{A}^i(k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , составленную из элементов

$$\left\{ \alpha_{j,v}^i \frac{a_j^i(k, x_1(k), \dots, x_n(k))}{x_v(k)} \right\}, \quad j, v = 1, 2, \dots, n.$$

**Замечание 2.** Если  $x_v(k) = 0$ , то по условию  $\alpha_{j,v}^i = 0$  и соответствующее слагаемое равно нулю.

**Теорема 5.** Пусть существует матрица  $K(k)$  такая, что для  $l \geq l_0$  выполняется неравенство

$$\prod_{k=l_0}^l s_* \left( \bar{A}^i(k) + B_j(k)K(k) \right) \leq C = \text{const},$$

справедливое для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ . Тогда матрица  $K(k)$  осуществляет одновременную стабилизацию систем уравнений (15) к тривиальному решению.

**Теорема 6.** Пусть существует матрица  $K(k)$  такая, что для  $l \geq l_0$  выполняется неравенство

$$\sum_{k=l_0}^l \Lambda \left( \ln \left( \bar{A}^i(k) + B_i(k)K(k) \right) \right) \leq C = \text{const},$$

$i = 1, 2, \dots, m$ .

Тогда матрица  $K(k)$  осуществляет одновременную стабилизацию систем уравнений (15) к тривиальному решению.

#### Список литературы

1. **Поляк, Б. Т.** Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М. : Наука, 2002. – 303 с.
2. **Бойков, И. В.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пензенского гос. ун-та, 2008. – 224 с.
3. **Далецкий, Ю. Л.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 534 с.

#### **Бойков Илья Владимирович**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
высшей и прикладной математики,  
Пензенский государственный  
университет

E-mail: math@pnzgu.ru

#### **Boykov Ilya Vladimirovich**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
professor, head of sub-department  
of higher and applied mathematics,  
Penza State University

УДК 518.5

**Бойков, И. В.**

**Алгоритмы управления и стабилизации дискретных систем /**  
И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион.  
Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 96–104.



УДК [530.12+530.145](082)

*Л. В. Грунская, В. М. Журавлев, В. А. Ефимов, А. А. Закиров*

## **МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТЕПЕНИ ВОЗДЕЙСТВИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ<sup>1</sup>**

*Аннотация.* Исследованы взаимосвязи электрического поля приземного слоя атмосферы с геофизическими процессами с помощью радиотехнических и радиофизических методов и средств. Общая постановка задачи спектрального оценивания процесса, анализируемого в данной работе и состоящего из помехового фона и частично детерминированного гармонического сигнала (лунно-солнечные приливные эффекты), формулируется следующим образом: необходимо по данным дискретных измерений вертикальной составляющей напряженности электрического поля приземного слоя на конечном интервале времени получить достоверную оценку амплитуды спектральных компонент на известных частотах лунно-солнечных приливов. Доказана перспективность применения радиотехнического метода корреляционного квадратурного приемника при решении задачи оценки амплитуды электрического поля на частотах лунно-солнечных приливов.

*Ключевые слова:* электрическое поле приземного слоя атмосферы, спектральный анализ, лунно-солнечные приливы.

*Abstract.* The work is connected with the investigation of the interconnection of the electrical field of the atmosphere boundary layer with geophysical processes with the help of radiotechnical and radiophysical methods and facilities. The general task statement of the spectral process estimation, analysed in this work and which consists of noise background and partially determined harmonic signal (moon and solar tide effects) is formulated in the following way: it is necessary to get the true estimation of the amplitude of the spectral components at the known frequencies of the moon and solar tides according to the given discrete measurements of the vertical component of the boundary layer electric intensity at the final time interval. Perspectivity of using radiotechnical method of the correlative quadrature receiver for solving the problem of the estimation of the electrical field amplitude at the frequencies of moon and solar tides has been proved.

*Keywords:* electrical field, geophysical processes, spectral analysis, optimum reception.

### **Исследование методов спектрального оценивания с точки зрения решаемой задачи**

Первым методом, используемым для оценивания спектральной плотности при исследовании экспериментальных данных, был метод периодограмм,

---

<sup>1</sup> Работа осуществлена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: гранты РФФИ № 01-05-64652, № 04-05-64895.

предложенный Шустером [1]. Идея этого метода сводится к попытке оценить спектральную плотность непосредственно с помощью представления

$$\hat{S}(f) = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{2\pi i f k} \right|^2, \quad (1)$$

где  $\{x_k\}_{k=1}^n$  – ряд наблюдений;  $n$  – длина ряда.

Такой метод фактически предполагает, что Фурье-преобразование временного ряда является хорошей оценкой Фурье-компонент стационарного процесса. Последнее оказывается необоснованным предположением по ряду причин. Первое возражение состоит в том, что такой подход на самом деле решает несколько иную задачу, чем оценка спектральной плотности стационарного процесса с гармониками. Фурье-преобразование (1), даже если предположить детерминированный характер самого процесса, отражает спектральные свойства процесса, везде равного нулю, за исключением небольшого отрезка, измеренного в эксперименте, что далеко от желаемого. Результатом этого является появление в спектре специфической неравномерности спектральной плотности, не связанной с реальным процессом. Фактически в процессе оценивания не используется нигде статистическое осреднение (по ансамблю или по времени). Последнее фактически означает, что такой подход эквивалентен предположению, что исследователь имеет дело с детерминированным процессом. Вследствие этого появляются существенные статистические флуктуации в оценке спектральной плотности, которые не убывают при увеличении длины ряда. Общий вывод из анализа метода периодограмм, предложенного Шустером, состоит в том, что любой метод спектрального оценивания, претендующий на состоятельность, должен использовать в явном виде усреднение по времени.

Метод периодограмм Шустера оставался единственным методом спектрального оценивания до работы Юла [2]. Идея Юла состояла в том, что относительно исследуемого процесса можно заранее предположить, что он представляет собой колебательный процесс в линейной системе, которая подвержена случайному внешнему воздействию. Уравнение для дискретного процесса можно записать следующим образом:

$$x_n + \sum_{k=1}^M A_k x_{n-k} = \varepsilon_n, \quad n = 0, \dots, \infty, \quad (2)$$

где  $A_k$  – коэффициенты, полученные дискретизацией линейного оператора  $\hat{L}_1 \hat{L}$ , а целое число  $M$  – общий порядок этого оператора;  $\varepsilon_k$  – дискретный стационарный в широком смысле процесс белого шума:  $\langle \varepsilon_k \rangle = 0$ ,  $\langle \varepsilon_k \varepsilon_j \rangle = 0$ ,  $k \neq j$ ,  $\langle \varepsilon_k^2 \rangle = \sigma_\varepsilon^2$ ,  $k, j = -\infty, \dots, \infty$ .

Модель (2) называется моделью авторегрессии, или АР-моделью, соответствующий процесс будем называть АР-процессом. Подобная модель была предложена Юлом для оценивания спектральной плотности процессов, содержащих, кроме стационарного процесса, аддитивную составляющую в форме набора детерминированных гармоник. Как видно, идеология модели вполне соответствует большинству физических моделей колебательных и волно-

вых процессов в однородной среде. Основными недостатками данного метода являются следующие. Во-первых, это требование того, что исследуемый процесс вызывается воздействием именно белого шума на колебательную систему с достаточно высокой добротностью (все декременты затухания малы и отрицательны). Результатом этого является то, что, если процесс имеет точки с нулевым значением спектральной плотности, то их оценивание будет происходить с существенными искажениями. Эти недостатки в несколько иной форме были рассмотрены в книгах [3, 4]. Во-вторых, имеются чисто технические недостатки, состоящие в отсутствии реального критерия, по которому следует выбирать порядок модели  $M$ . Несмотря на некоторые его недостатки, этот метод нашел свое естественное развитие в методе максимальной энтропии.

Чуть позже метода авторегрессии Юла Винером были развиты несколько иные подходы к анализу временных рядов. Для спектрального оценивания важным является подход, основанный на процедуре оценивания автоковариационной функции. Идеология этого метода сводится к тому, что производится оценивание автоковариационной функции и использования далее формулы Винера – Хинчина для вычисления спектральной плотности. В качестве оценки спектральной плотности рассматривается величина

$$\hat{S}(f) = \sum_{k=-M}^M R_k \exp\{2\pi ifk\}. \quad (3)$$

Последняя формула является следствием формулы Винера – Хинчина в предположении, что  $R_k = 0, |k| > M$ . Этот подход является наиболее обоснованным с точки зрения математической статистики в том смысле, что для всех оценок этого метода имеются строго доказанные утверждения. Основные недостатки этого метода сводятся к следующим. Во-первых, данный метод применим лишь в случае, если автокорреляционная функция быстро убывает за пределами сдвигов с номерами, большими  $M$ . Однако это условие противоречит предположению о возможном наличии в изучаемом процессе детерминированных гармонических составляющих, для которых автоковариационная функция не затухает, и, следовательно, оценка (3) является несостоятельной в этом случае. Но если детерминированных гармоник нет, то такая оценка при подходящем выборе  $M$  оказывается состоятельной и несмещенной. Во-вторых, свойства автоковариационной функции и спектральной плотности в формуле Винера – Хинчина существенно зависимы. А в задачах обнаружения детерминированных сигналов и волн метод неэффективен. Проблему появления отрицательных значений спектральной плотности было предложено решать с помощью предварительной фильтрации рядов. Последняя идея была исследована в работах Тьюки, Бартлета и других ученых в 50-х гг. XX в. [5, 6].

Метод максимальной энтропии (ММЭ) алгоритмически тесно связан с авторегрессионными методами спектрального оценивания, известными с 1930-х гг. Различные варианты ММЭ описаны в работах [5–7]. Любой метод спектрального анализа базируется на некоторой модели оцениваемого процесса. Стандартный корреляционный анализ предлагает в качестве оценки спектральной плотности использовать Фурье-компоненты автокорреляционной функции изучаемого процесса. Пусть  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) – дискретный вре-

менной ряд, полученный с помощью измерения изучаемого процесса через одинаковые промежутки времени  $\Delta t$ . Состоятельной и несмещенной оценкой автоковариационной функции процесса в этом случае будет дискретная функция:

$$r_j = \frac{1}{N-j-1} \sum_{k=1}^{N-j} x_k x_{k+j}, \quad j = -M, \dots, M, \quad M \ll N, \quad r_{-j} = r_j. \quad (4)$$

Число  $M$  называется порядком модели. Оценка строится по конечному отрезку автоковариационной функции процесса длиной  $M$ . Это означает, что в качестве модели процесса выбран процесс, в котором ковариационная функция обращается в ноль на временных сдвигах  $\tau > M$ . ММЭ предлагает следующее решение проблемы оценивания детерминированных составляющих. В этом методе не предполагается, что корреляционная функция равна нулю на сдвигах, больших  $M$ . Оценкой функции распределения исходного ряда будет нормальное распределение. Оценка спектра, доставляющая экстремум этому функционалу, имеет вид

$$S(f) = \left[ - \sum_{k=-M}^M \lambda_k e^{-i2\pi f k} \right]^{-1}. \quad (5)$$

Оценка такого типа соответствует авторегрессионным моделям процессов [5–7]. Алгоритмы построения этих оценок известны и описаны, например, в [7]. Также было показано, что оценка ММЭ по форме совпадает с оценкой АР-модели процесса. На основе этого наблюдения и строятся все основные алгоритмы вычисления спектральной плотности по методу ММЭ [8].

#### **Авторегрессионное спектральное оценивание и спектральный анализ на основе преобразования Фурье экспериментальных временных рядов по данным $E_z$ в приземном слое атмосферы**

Общая постановка задачи спектрального оценивания процесса, анализируемого в данной работе и состоящего из помехового фона и частично детерминированного гармонического сигнала (лунно-солнечные приливные эффекты), формулируется следующим образом: необходимо по данным дискретных измерений вертикальной составляющей напряженности электрического поля ( $E_z$ ) приземного слоя на конечном интервале времени получить достоверную оценку амплитуды спектральных компонент на известных частотах лунно-солнечных приливов.

В процессе анализа существующих методов спектральной оценки с точки зрения решения поставленной в работе основной задачи была осуществлена обработка экспериментальных данных, полученных на полигоне ВлГУ по регистрациям вертикальной составляющей напряженности электрического поля в приземном слое, с помощью метода максимальной энтропии [9].

Использованию ММЭ предшествует специальная подготовка данных к спектральной обработке. На первом этапе производится полосовая фильтрация с помощью цифрового фильтра Тьюки. Экспериментальные данные по результатам мониторинга  $E_z$ , полученные на полигоне ВлГУ, были взяты с дискретностью измерения  $\Delta t = 30$  с. Поскольку основной интерес представ-

ляют гармонические составляющие в диапазоне периодов от 1 ч и выше, то целесообразно проводить высокочастотное сглаживание (низкочастотная фильтрация) (для избежания элайзинга), после чего дискретность следования довести до  $\Delta t = 10$  мин. В результате этого объем вычислений уменьшается без потери информации в нужном диапазоне частот. Как показал предварительный анализ данных, низкочастотные составляющие процесса на периодах выше двух суток представляют собой существенно нестационарный процесс, что значительно искажает оценки вблизи диапазона порядка одних суток. Поэтому было принято решение проводить дополнительную высокочастотную фильтрацию для удаления всех составляющих процесса, имеющих период больше двух суток.

Оба процесса фильтрации проводились с помощью фильтра Тьюки, весовые коэффициенты которого задаются следующими соотношениями:

$$W_k = \frac{1}{2P} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi k}{P} \right) \right), \quad (6)$$

где  $P$  – длина фильтра.

Основным полезным свойством фильтра Тьюки является то, что он не искажает фазы сигналов. Для низкочастотного фильтра полагалось  $P = 20$ , а для высокочастотного  $P = 300$  (частота обрезания имеет период чуть больше двух суток). После низкочастотной фильтрации производилась децимация ряда с шагом  $N = 20$ . В результате чего дискретность ряда стала  $\Delta t = 20 \cdot 30 \text{ с} = 10$  мин.

Одним из основных элементов процедуры спектрального оценивания по ММЭ является выбор порядка спектральной модели. Выбор порядка модели определяет степень достоверности формы зависимости спектральной плотности от частоты. Порядок модели определяет максимальное число спектральных пиков, которые может одновременно разрешить модель в доступной для оценивания области частот ( $0 - f_n = 1/2\Delta t$ ). Если это число меньше числа реально существующих гармонических составляющих, то оценка спектра не будет содержать всей полезной информации (часть информации оказывается утерянной), если же это число существенно превышает число реально существующих гармонических составляющих, то в спектре появляются ложные пики, ошибочно выделенные моделью из шума, в который, как правило, погружены гармонические составляющие процесса. В данной работе выбор порядка модели осуществляется с помощью установления порядков модели по области максимальной устойчивости формы спектральной кривой и остаточной дисперсии. На рис. 1 представлена спектральная плотность  $E_z$ , полученная с помощью ММЭ (два графика рядом – для рядов, сдвинутых между собой на 3 ч). Обработка осуществлена с распараллеливанием рядов. Ряд получен сглаживанием исходных данных длиной в один год с шагом 60 с. Полученные спектры содержат компоненты, близкие по частотам к основным термогравитационным приливам  $S1$  и  $S2$ . Однако незначительное отношение сигнал/шум не позволяет говорить о достоверной оценке параметров сигналов на анализируемых частотах.

При использовании метода максимальной энтропии для решения задачи выделения эффектов воздействия лунно-солнечных приливов на электрическое поле приземного слоя сталкиваются с рядом трудностей. Во-первых,

как было отмечено, высокий уровень шумов не позволяет данным методом с высокой степенью достоверности выделить необходимую информацию о приливных частотах в электрическом поле приземного слоя атмосферы, также согласно рис. 1 оценка амплитуды нестационарна. Во-вторых, ММЭ не решает задачу анализа амплитуды спектральных компонент на конкретных частотах анализируемых источников.

По результатам экспериментальных регистраций 1999–2004 гг. была осуществлена спектральная обработка записей электрического поля приземного слоя атмосферы с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ). На рис. 2 представлены результаты спектральной обработки с помощью БПФ по данным флюксметра полигона ВлГУ. Спектры Фурье позволяют анализировать процессы в заданном диапазоне частот. Как видно из рис. 2, вблизи частот термогравитационных солнечных приливов ( $S_1$ ,  $S_2$ ) наблюдаются пики с отношением сигнал/шум, необходимым для анализа их амплитуд. Получить же несмещенные оценки амплитуды на конкретных частотах приливов, известных заранее, данный метод также не позволяет.

Таким образом, спектральный анализ на основе преобразования Фурье не позволяет достоверно оценить амплитуды спектральных компонент на конкретных частотах анализируемых источников, что является важным фактором при оценке отношения сигнал/шум на частотах приливов.

Анализ существующих методов классического спектрального оценивания с точки зрения использования их для получения достоверной оценки амплитуд спектральных компонент на частотах анализируемых источников позволяет сделать следующие выводы: методы спектрального оценивания (модели авторегрессии, корреляционные методы, метод максимальной энтропии), несмотря на достижение высокого разрешения (ММЭ), не позволяют достоверно оценить амплитуды на конкретной частоте, соответствующей анализируемому источнику (лунно-солнечные приливы); проанализированные методы спектрального оценивания все же не вполне оптимальны и почти всегда используют эвристические приемы.

Поэтому дальнейшая работа была посвящена поиску такого метода спектрального оценивания, который, во-первых, позволял бы выделять полезную информацию при высоком уровне шумов в исходных реализациях; во-вторых, обладал бы возможностью осуществления достоверной оценки амплитуды спектральных компонент на заранее известных частотах. Применение метода корреляционного квадратурного приемника (ККП), хорошо известного в радиотехнике, позволило решить данную задачу.

#### **Использование корреляционного квадратурного приемника для оценки амплитуды спектральных компонент $E_z$ приземного слоя атмосферы на частотах лунно-солнечных приливов**

Основной целью данной работы явилось обоснование возможности оценки амплитуды вертикальной составляющей напряженности электрического поля приземного слоя атмосферы на известных частотах приливных явлений с помощью радиотехнического метода корреляционного квадратурного приемника. Снижение высокого уровня местных помех удалось решить путем организации разнесенного в пространстве приема с последующей корреляционной обработкой результатов экспериментальных регистраций.

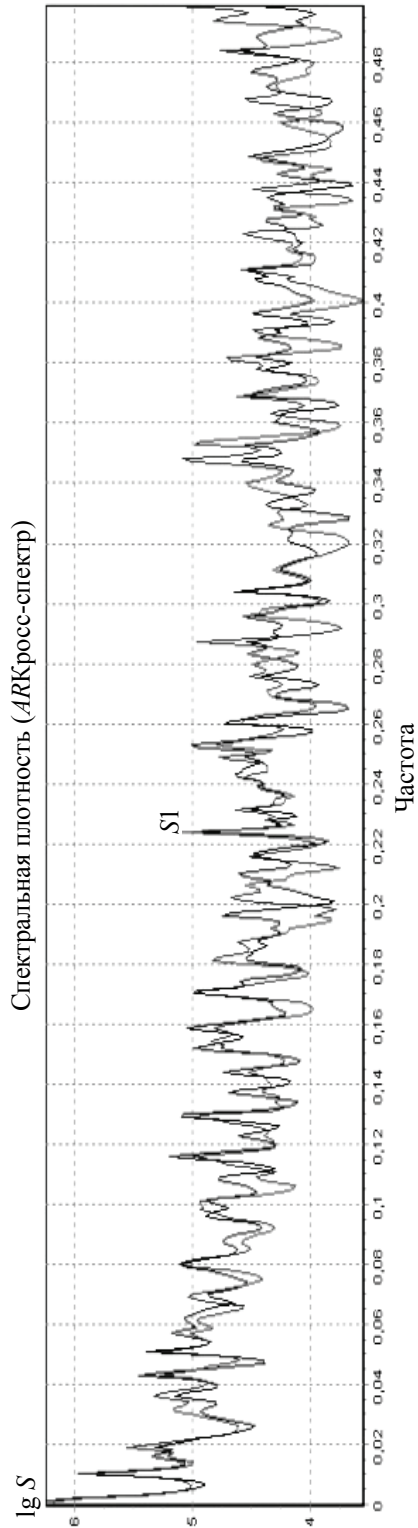


Рис. 1 Оценка спектра  $E_z$  с помощью метода максимальной энтропии, данные полигона за 2004 г.

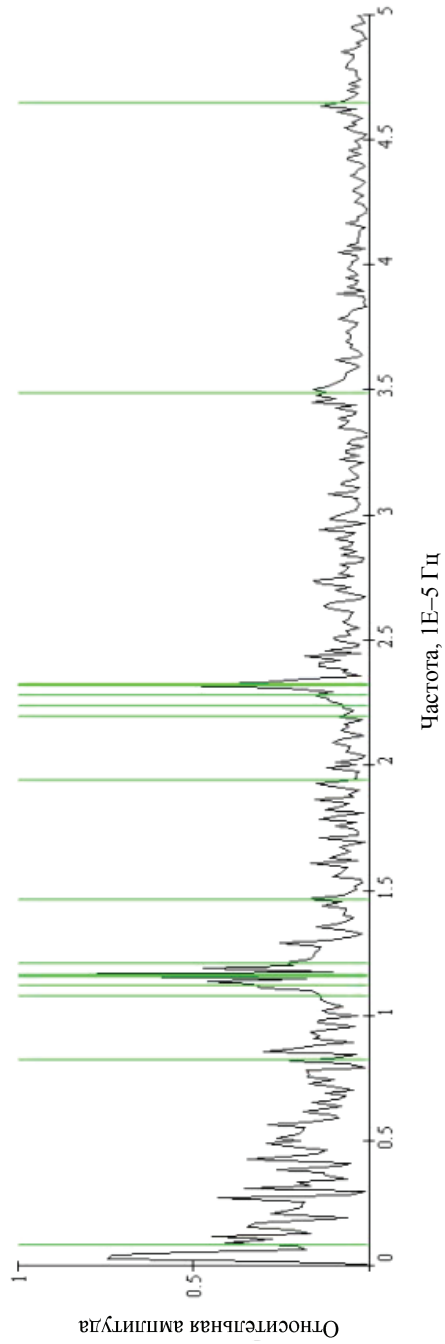


Рис. 2 График спектра Фурье по данным флюксметра полигона ВлГУ, 2003 г.

Было показано, как наряду с классическими и параметрическими методами спектрального оценивания для решения ряда геофизических задач эффективно может быть использован радиотехнический метод ККП. Исследование приливного эффекта – это одно из возможных направлений физических исследований, где используется и развивается метод ККП для оценки параметров сигналов.

Для решения поставленной задачи был использован вариант корреляционного квадратурного приемника с включением в его структуру как фильтра низких частот, так и косинусоидального окна с целью наиболее достоверной оценки амплитуды спектральных компонент вертикальной составляющей напряженности электрического поля приземного слоя атмосферы на частотах, соответствующих лунно-солнечным приливам [16–19].

В соответствии с [10] оптимальная оценка уровня сигнала известной частоты со случайной начальной фазой осуществляется по формуле

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}} \left[ \frac{1}{2} \int_0^T Y(t) \times S^*(t) dt \right] = \int_0^T Y(t) \times S(t) \frac{\cos [2\pi f_0 t + \varphi_0]}{\sin [2\pi f_0 t + \varphi_0]} dt, \quad (7)$$

где  $Y(t)$  – входная реализация обрабатываемого сигнала;  $S(t)$  – опорный (обнаруживаемый) сигнал в виде гармонического колебания на частоте  $f_0$  с постоянной амплитудой и начальной фазой  $\varphi_0$ ;  $Z$  – является абсолютным значением корреляции комплексных принятого и выделяемого сигналов.

Были проведены исследования [11, 12], которые показали, что такой приемник имеет частотную характеристику типа  $\sin(x)/x$ . Эта функция имеет главный максимум (главный лепесток) на частоте  $f_0$ . Ширина главного лепестка:  $2/N$ , где  $N$  – число входных отсчетов. Уровень первого бокового лепестка функции  $\sin(x)/x$  равен 23 % от уровня главного и не зависит ни от диапазона частот, ни от числа входных отсчетов. За разрешающую способность такого устройства можно принять ширину главного лепестка. Для устройства, осуществляющего достоверную оценку амплитуд спектральных компонент напряженности электрического поля приземного слоя, желательно иметь ширину главного лепестка как можно меньше при малом уровне боковых лепестков. Решить эту задачу можно с помощью выбора формы фильтра с линейной фазочастотной характеристикой:

$$g(t) = \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}{2}, \quad (8)$$

где  $T$  – длина входной реализации.

При обработке входных данных взвешивающим окном уровень боковых лепестков в частотной характеристике ККП был снижен до 7 % от высоты главного при его незначительном расширении [11–14]. Модифицированный вариант корреляционного квадратурного приемника с взвешиванием исходных данных косинусоидальным окном позволяет получить оценку средней амплитуды на частотах анализируемых сигналов, а так как ККП является узкополосным фильтром, то оценка на выходе ККП получается на фоне гауссовых помех (выбеливание входного сигнала), а следовательно, она приме-



нима к нестационарным процессам. Программа, реализующая такой приемник, была применена для решения задачи оценки средней амплитуды спектральных компонент, соответствующих частотам лунно-солнечных приливов в спектрах экспериментальных регистраций электрического поля приземного слоя атмосферы. Оценки средней амплитуды вертикальной составляющей напряженности электрического поля в приземном слое атмосферы были осуществлены по данным станций ВЛГУ и Главной геофизической обсерватории научно-исследовательского центра дистанционного зондирования атмосферы (ГГО НИЦ ДЗА).

Богатый экспериментальный материал, полученный по результатам экспедиций за 1997–2004 гг., результатам регистраций станции ВЛГУ и станции в ГГО НИЦ ДЗА, послужил основной базой для исследования влияния глобальных геофизических процессов на вариации напряженности атмосферного электрического поля приземного слоя. По результатам регистраций электрического поля в сети разнесенных в пространстве станций получены обширные каталоги спектров в диапазоне лунно-солнечных приливов [11–19].

Модернизированный вариант корреляционного приемника позволил получить несмещенную оценку уровня каждой спектральной компоненты анализируемого временного ряда по критерию максимального правдоподобия. По результатам анализа каталогов спектров были оценены амплитуды вертикальной составляющей напряженности электрического поля в приземном слое атмосферы на частотах термогравитационных солнечных приливов. Диапазон изменения средней амплитуды на частотах термогравитационных солнечных приливов составил: 16 В/м ( $S_1$ ), 8 В/м ( $S_2$ ), 3 В/м ( $S_3$ ). Пример спектра вблизи лунно-солнечных приливов  $S_1$ ,  $P_1$ , полученный с помощью ККП по данным ГГО НИЦ ДЗА, приведен на рис. 3.

Установленные экспериментально закономерности сопоставлялись с результатами других экспериментов. Были проанализированы экспериментальные данные по электрическому полю приземного слоя атмосферы по станциям ГГО НИЦ ДЗА: Воейково – 1966–1995; Верхнее Дуброво – 1974–1995; Душети – 1967–1980. Среднее значение амплитуды электрического поля и отношение сигнал/шум на частотах приливов  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  по указанным станциям составили соответственно:  $S_1$ (15 В/м, 10 В/м, 12 В/м);  $S_2$  (10 В/м, 7 В/м, 10 В/м);  $S_3$  (3 В/м, 4 В/м, 6 В/м). Диапазон изменения амплитуды электрического поля на частотах термогравитационных приливов по данным модели составляет 10–15 В/м, а диапазон изменения средней амплитуды по данным всех проанализированных станций составил 3–20 В/м.

Полученные оценки амплитуды  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  по экспериментальным результатам имеют тот же порядок, что и теоретические оценки, что подтверждает адекватность разработанной модели процессов в электрическом поле приземного слоя [15–19].

### Выводы

Анализ существующих методов классического спектрального оценивания с точки зрения использования их для получения несмещенной оценки амплитуды спектральных компонент на частотах лунно-солнечных приливов позволяет сделать следующий вывод.

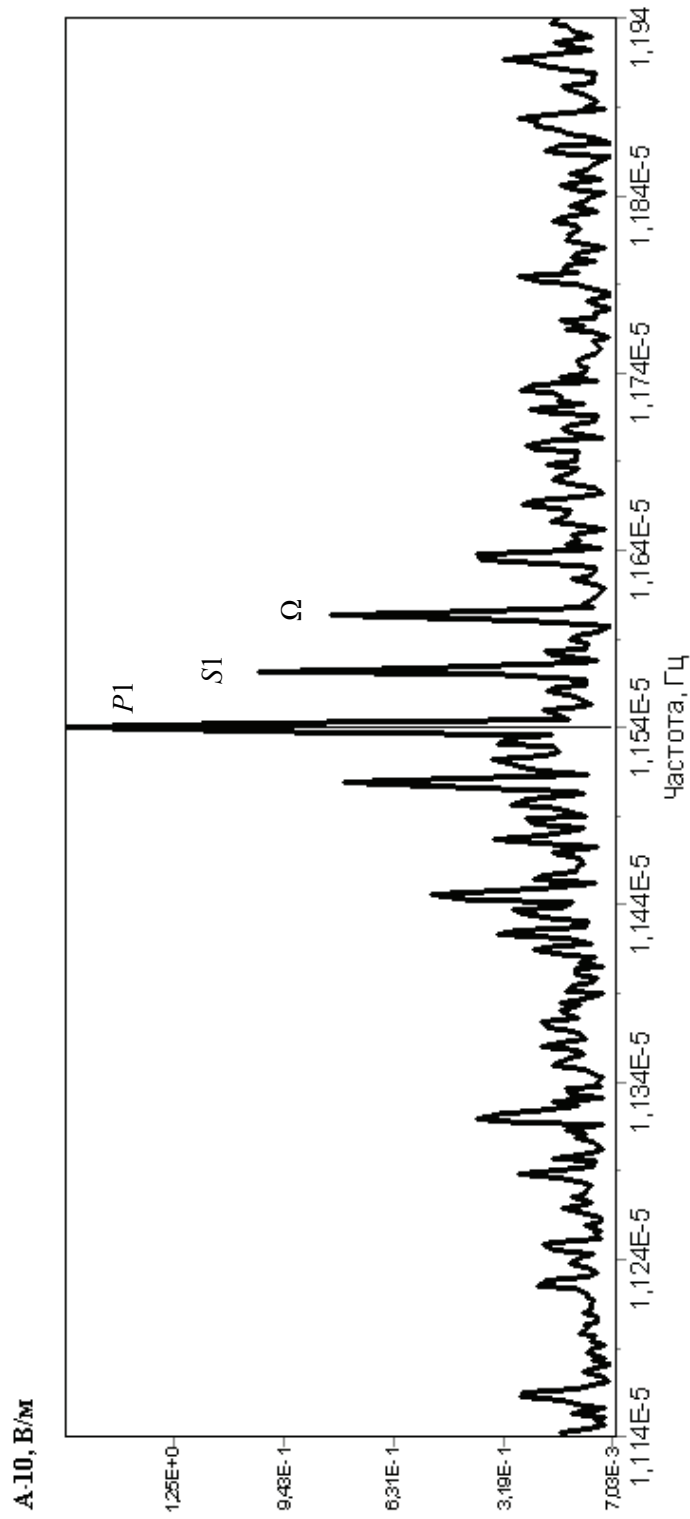


Рис. 3 Разделение приливов P1 и S1 по данным станции Гидрометеослужбы

Проанализированные методы спектрального оценивания (периодограмма Шустера, модели авторегрессии, корреляционные методы, метод максимальной энтропии) несмотря на достижение высокого разрешения (ММЭ) не позволяют получить оценку амплитуды на каждой конкретной частоте, соответствующей лунно-солнечным приливам. Указанные выше методы спектральной оценки применимы только на участках стационарности сигнала, не эффективны при наличии высокого уровня помехового фона и не могут быть использованы для анализа нестационарных сигналов.

Доказана перспективность применения радиотехнического метода корреляционного квадратурного приемника при решении задачи оценки амплитуды электрического поля на частотах лунно-солнечных приливов. Так как ККП является узкополосным фильтром, то оценка амплитуды спектральных компонент на выходе ККП получается на фоне гауссовых помех (выбеливание входного сигнала), а следовательно, она применима к нестационарным процессам. Результат сравнения теоретических и экспериментальных оценок абсолютных значений электрического поля в приземном слое на частотах термогравитационных приливов по данным станций ВлГУ и ГГО позволяет сделать вывод об адекватности разработанной модели реальным условиям.

#### Список литературы

1. **Schuster, A.** On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26-day period of meteorological phenomena / A. Schuster // Terr. Magnet. – 1898. – V. 3. – P. 13–41.
2. **Yule, G. U.** On a Method of Investigation Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers / G. U. Yule // Philos. Trans. R. Soc. London, – 1927. – V. 226. – P. 267–298. – (Ser. A).
3. **Кендалл, М. Дж.** Статистические выводы и связи / М. Дж. Кендалл, А. Стюарт. – М.: Наука, 1973. – 899 с.
4. **Кендалл, М. Дж.** Теория распределений / М. Дж. Кендалл, А. Стюарт; пер. с англ. В. В. Сазонова; под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1966. – 587 с.
5. **Дженкинс, Г.** Спектральный анализ и его приложения / Г. Дженкинс, Д. Ваттс. – М.: Мир, 1972. – Т. 2. – 283 с.
6. **Бокс, Дж.** Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. – 197 с.
7. **Журавлев, В. М.** Метод максимальной энтропии в многомерном спектральном анализе: дис. ... к.ф.-м.н. / Журавлев В. М. – Севастополь, МГИ АН УССР, 1987. – 320 с.
8. **Дворянинов, Г. С.** Метод максимальной энтропии в многомерном спектральном анализе / Г. С. Дворянинов, В. М. Журавлев, А. В. Прусов // Преп. МГИ АН УССР, 1986. – Ч. 1. – 45 с.; Ч. 2. – 23 с.
9. **Грунская, Л. В.** Экспериментально-методический комплекс для изучения изменчивости электромагнитного поля Земли в крайненизкочастотном диапазоне, связанной с глобальными геофизическими явлениями / Л. В. Грунская, В. Н. Журавлев, И. Н. Гаврилов // Ученые записки Ульяновского государственного университета. – 2002. – № 1 (12). – С. 29–37. – (Серия Физическая).
10. **Гришин, Ю. П.** Радиотехнические системы / Ю. П. Гришин, В. П. Ипатов, Ю. М. Казаринов; под ред. Ю. М. Казаринова. – М.: Высшая школа, 1990. – 496 с.
11. **Грунская, Л. В.** Оптимальный приемник в системе мониторинга электрического поля приземного слоя атмосферы / Л. В. Грунская [и др.] // Проектирование и технология электронных средств. – 2005. – № 3. – С. 56–60.

12. **Грунская, Л. В.** Модифицированный вариант корреляционного квадратурного приемника / Л. В. Грунская, В. А. Мишин // Радиофизика : тезисы 10-й Международ. научно-техн. конф. – М., 2004. – С. 527.
13. **Грунская, Л. В.** Оптимальная обработка информации при анализе характеристик электрического поля приземного слоя атмосферы на частотах геофизических источников / Л. В. Грунская [и др.] // Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике : тезисы докладов 12-й Рос. гравитационной конф. – Казань, 2005. – С. 162.
14. **Грунская, Л. В.** Оптимальная обработка информации в системе многоканального мониторинга электромагнитного поля приземного слоя атмосферы / Л. В. Грунская, В. В. Исакевич // Информационно-телекоммуникационные технологии : тезисы докладов Всероссийской научно-техн. конф. – Сочи, 2004. – С. 203–204.
15. **Грунская, Л. В.** Экспериментальные и теоретические исследования вариаций напряженности электрического поля, обусловленных солнечными и лунными приливами в приземном слое атмосферы / Л. В. Грунская, В. Н. Морозов // Известия вузов. Физика. – 2005. – № 8. – С. 33–39.
16. **Грунская, Л. В.** Оптимальный приемник в системе мониторинга электрического поля приземного слоя атмосферы / Л. В. Грунская [и др.] // Проектирование и технология электронных средств. – 2005. – № 3. – С. 56–60.
17. **Грунская, Л. В.** Повышение достоверности спектральной оценки, получаемой с помощью корреляционного квадратурного приемника / Л. В. Грунская [и др.] // Проектирование и технология электронных средств. – 2004. – Спец. вып. – С. 66–71.
18. **Грунская, Л. В.** Лунно-солнечные приливы в электрическом поле атмосферы Земли / Л. В. Грунская, В. Н. Морозов // Известия вузов. Физика. – 2003. – № 12. – С. 71–77.
19. **Грунская, Л. В.** Оптимальная обработка информации в системе многоканального синхронного мониторинга электромагнитного поля приземного слоя атмосферы / Л. В. Грунская // Перспективные технологии в средствах передачи информации : труды VI Междунар. научно-техн. конф. – Владимир, 2005. – С. 228–230.

---

***Грунская Любовь Валентиновна***

доктор технических наук, профессор,  
кафедра общей и прикладной физики,  
Владимирский государственный  
университет

E-mail: grunsk@vpti.vladimir.ru

***Grunskaya Lyubov Valentinovna***

Doctor of engineering sciences, professor,  
sub-department of general and applied  
physics, Vladimir State University

***Журавлев Виктор Михайлович***

доктор физико-математических наук,  
профессор, кафедра теоретической  
физики, Ульяновский государственный  
университет

E-mail: zhvictorm@gmail.com

***Zhuravlev Viktor Mikhailovich***

Doctor of physico-mathematical sciences,  
professor, sub-department of theoretical  
physics, Ulyanovsk State University

***Ефимов Владислав Алексеевич***

кандидат технических наук, доцент,  
кафедра радиотехники и радиосистем,  
Владимирский государственный  
университет

E-mail: grunsk@vpti.vladimir.ru

***Efimov Vladislav Alekseevich***

Candidate of engineering sciences, associate  
professor, sub-department of radio  
technology and radio systems,  
Vladimir State University

**Закиров Александр Александрович**

аспирант, Владимирский  
государственный университет

E-mail: grunsk@vpti.vladimir.ru

**Zakirov Alexander Alexandrovich**

Postgraduate student,  
Vladimir State University

---

УДК [530.12+530.145](082)

**Грунская, Л. В.**

**Методы спектрального оценивания в задаче исследования степени воздействия геофизических процессов на электрическое поле приземного слоя атмосферы / Л. В. Грунская, В. М. Журавлев, В. А. Ефимов, А. А. Закиров // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 105–117.**

## **О ВОЗМОЖНОСТИ ПРОСВЕТЛЕНИЯ СРЕД В ЗАПРЕДЕЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ ЧАСТОТ**

*Аннотация.* Рассмотрены условия распространения электромагнитных волн в средах с дисперсией в области частот непрозрачности (запредельной области частот). Установлено, что введение усиливающих компонент в среды приводит к их просветлению с высоким коэффициентом усиления. Рассмотрено влияние усиления на волновые процессы в гиротропных средах.

*Ключевые слова:* дисперсные, анизотропные среды, запредельная область частот, условие усиления.

*Abstract.* Conditions of distribution of electromagnetic waves in environments with a dispersion in the field of frequencies of opacity (band-stop area of frequencies) are considered. It is established, that introduction strengthening a component on Wednesdays leads to their enlightenment with high factor of strengthening. Influence of strengthening on wave processes in gyrotropy environments is considered.

*Keywords:* disperse, anisotropic environments, other-wordly area of frequencies, strengthening condition, band-stop of frequencies.

### **Введение**

Одними из основных электродинамических характеристик материальных сред являются области их частотной прозрачности для электромагнитных волн, определяющих частотные диапазоны их использования (или, наоборот, запредельные области частот) [1, 2]. Физические свойства различных сред в областях прозрачности достаточно хорошо изучены и широко используются в технике [3–6]. Методы компенсации затухания и усиления электромагнитных волн путем введения усиливающих сред (твердотельных или газовых) в области их прозрачности рассматривались многими авторами [7–10]. Уровень усиления электромагнитных волн в средах в области их прозрачности пропорционален мнимой части диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon''$ , характеризующей активность среды (обычно невелик). Известен эффект самоиндуцированной прозрачности (СИП) сред, описываемых в рамках моделей двухуровневых систем (передний фронт импульса волны переводит атомы среды в возбужденное состояние, энергия которых возвращается задней части импульса) [10]. Эффект наблюдается на резонансных частотах атомов среды. В работах [11, 12] показано, что использование усиливающих свойств сред любой природы в области запредельных частот волноводных экранированных структур позволяет при малом параметре усиления сред получить высокий коэффициент усиления электромагнитных волн в широком диапазоне частот. В настоящей работе рассмотрены условия распространения электромагнитных волн в неограниченных средах с дисперсией в запредельной области частот в изотропных и гиротропных средах.

### **1 Волны в запредельных областях частот**

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в однородном изотропном пространстве, характеризуемом постоянными во времени и в

пространстве параметрами диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостей сред в отсутствие источников излучения. Отметим, что в отсутствие затухания или усиления ( $\epsilon'' = 0$ ,  $\mu'' = 0$ ) условием прозрачности сред для электромагнитных волн является выполнение одновременно соотношений:

$$\epsilon' > 0, \mu' > 0 \quad (\text{а})$$

или соотношений

$$\epsilon' < 0, \mu' < 0. \quad (\text{б})$$

Для большинства известных сред в области прозрачности выполняются соотношения (а). Соотношения (б) выполняются для оптически отрицательных сред [13]. Условием непрозрачности (запредельности) сред являются соотношения:

$$\epsilon' < 0, \mu' > 0 \quad (\text{в})$$

или соотношения

$$\epsilon' > 0, \mu' < 0. \quad (\text{г})$$

В тех областях частот, где выполняется одно из этих соотношений, волновое число становится чисто мнимым  $k_z = ik_z''$ , ( $k_z' = 0$ ), и волны не распространяются (за направление распространения волны выберем ось  $Oz$ ). Условия (в) характерны для плазмы. В частности, для бесстолкновенной ( $\epsilon'' = 0$ ) плазмы запредельная область частот лежит в области частот:  $\omega < \omega_p$ , где действительная часть диэлектрической проницаемости  $\epsilon' < 0$ . Действительная часть волнового числа  $k_z' = 0$ ,  $\nu_f \rightarrow \infty$ , а мнимая компонента  $k_z'' = k_0 \sqrt{|\epsilon'|} \mu$  характеризует степень затухания. Соотношения (г) выполняются для ферромагнетиков в области частот ферромагнитного резонанса (ФМР).

Затухание (или усиление в зависимости от знака компоненты  $\epsilon''$ ) наблюдаются при комплексных параметрах  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$  и  $\mu = \mu' + i\mu''$ . Волновое число в направлении распространения волны имеет вид

$$k_z = k_z' + ik_z'' = k_0 \sqrt{(\epsilon' + i\epsilon'')(\mu' + i\mu'')}.$$

Для большинства известных сред, применяемых в волноводной технике (диэлектрики, сегнетоэлектрики, полупроводники), магнитные компоненты параметров сред диссипативные ( $\mu'' \leq 0$ ). Величина мнимой части диэлектрической проницаемости  $\epsilon''$  может рассматриваться как параметр активности среды:

– при  $\epsilon'' > 0$  амплитуды волн нарастают в пространстве (усиливающие среды);

– при  $\epsilon'' < 0$  амплитуда волн уменьшается, наблюдается затухание – среды диссипативные.

При  $\epsilon' > 0$  действительную и мнимую части волнового числа можно представить в виде

$$\begin{cases} k'_z \\ k''_z \end{cases} = k_0 \sqrt{((\epsilon' \mu' - \epsilon'' \mu'')^2 + (\epsilon'' \mu' + \epsilon' \mu'')^2)} \cdot \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (\delta/2), \quad (1)$$

где  $\delta = \arctg[(\epsilon'' \mu' + \epsilon' \mu'')/(\epsilon' \mu' - \epsilon'' \mu'')]$ .

При малом модуле параметра активности среды (затухание или усиление)  $|\epsilon''/\epsilon'| \ll 1$ . В этом случае компоненты волнового числа определяются в виде

$$k'_z \approx k_0 \sqrt{\epsilon' \mu'}, \quad k''_z \approx \frac{k_0 \epsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}}.$$

Тогда относительный параметр затухания (или усиления) определяется выражением

$$\frac{k''_z}{k'_z} \approx \frac{\epsilon'' \mu' + \epsilon' \mu''}{\epsilon' \mu' - \epsilon'' \mu''} \approx \frac{\epsilon''}{2\epsilon'}. \quad (2)$$

Таким образом, в области прозрачности сред коэффициент усиления (или затухания) волны  $k''_z$  пропорционален величине параметра активности среды  $\epsilon''$  (при малом по модулю параметре активности среды  $\epsilon''$  коэффициент усиления (или ослабления) волны  $k''_z$  также является малой величиной). Это свойство наблюдается для всех типов волноводных структур, что объясняет малую эффективность усилителей, работающих в области прозрачности структур.

В запредельной полосе частот для немагнитных сред выполняется соотношение  $\epsilon' \mu < 0$  ( $\mu = \mu'$ ,  $\mu'' = 0$ ), и при малой величине параметра активности среды

$$\begin{aligned} k'_z &= k_0 \left( (\epsilon' \mu)^2 + (\epsilon'' \mu)^2 \right)^{1/4} \cdot \sin(|\delta|/2) \approx \frac{k_0 |\epsilon''| \mu}{2 \sqrt{|\epsilon' \mu|}}; \\ k''_z &= \pm k_0 \left( (\epsilon' \mu)^2 + (\epsilon'' \mu)^2 \right)^{1/4} \cdot \cos(\delta/2) \approx \pm k_0 \sqrt{|\epsilon' \mu|}. \end{aligned} \quad (3)$$

Знак плюс соответствует активной среде, и знак минус соответствует диссипативной среде. Относительный параметр усиления (или затухания):

$$|k''_z/k'_z| \approx |2\epsilon''/\epsilon''| \gg 1. \quad (4)$$

Учет потерь или усиливающих свойств среды (параметр активности среды  $|\epsilon''| > 0$ ) независимо от его знака приводит к появлению в запредельной области частот действительной компоненты волнового числа  $k'_z \neq 0$ , волна распространяется вдоль оси  $Oz$ . Коэффициент усиления волны  $k''_z/k_0 \sim 1 \dots 10^2$  при малой величине параметра активности среды ( $\epsilon'' \sim 10^{-2} \dots 10^{-5}$ ).

## 2 Волны в изотропной ионизированной среде

В изотропной ионизированной среде без потерь (неподмагниченная плазма) диэлектрическая проницаемость определяется функцией  $\epsilon' = 1 - \omega_p^2/\omega^2$



( $\omega$  – частота электромагнитной волны,  $\omega_p$  – плазменная частота), и полоса частот  $\omega < \omega_p$  является запердельной. В этой области частот  $\epsilon' < 0$ , волновое число является величиной мнимой  $k = ik''$ , и затухание волн описывается функцией  $\sim \exp(-k''z)$ . Критическое значение частоты, разделяющее области пропускания и задерживания  $\omega_{cr} = \omega_p$ . При наличии потерь энергии (определяемых частотой столкновения носителей  $\nu$ ) параметр активности среды  $\epsilon'' < 0$ , характер распространения электромагнитных волн изменяется. В области частот  $\omega > \sqrt{\omega_p^2 - \nu^2}$  расположена полоса пропускания, в области частот  $0 < \omega < \sqrt{\omega_p^2 - \nu^2}$  расположена область частот с высоким затуханием. В полосе пропускания волны распространяются с затуханием, для компонент волнового числа выполняется соотношение  $|k'_z/k''_z| \gg 1$ . В полосе непропускания волны «просачиваются» в запердельную область пространства, быстро затухая вглубь этой области при удалении от источника излучения, при этом  $|k'_z/k''_z| \ll 1$ .

На рис. 1 показаны действительные (кривые 1, 2) и мнимые (кривые 3, 4) части волновых чисел (нормированных на волновое число в свободном пространстве) усиливающей среды (кривые 1, 3) и диссипативной среды (кривые 2, 4) в полосах: пропускания ( $\omega_p/\omega < 1$ ) и задерживания ( $\omega_p/\omega > 1$ ).

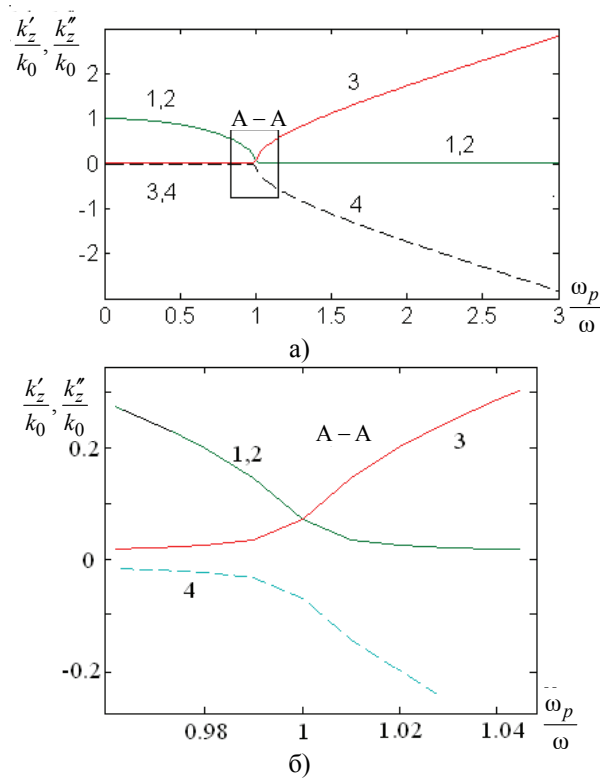


Рис. 1 Дисперсионные характеристики электромагнитных волн в плазме с активной и диссипативной средами (а) (кривые 1, 2 –  $k'_z/k_0$ ; кривая 3 –  $k''_z/k_0$  ( $\epsilon'' = 0,01$ ), кривая 4 –  $k''_z/k_0$  ( $\epsilon'' = -0,01$ )), б – область А–А.

Действительные части волновых чисел для активной и диссипативной сред практически совпадают во всей области частот. Мнимые части волновых чисел отличаются знаком: для диссипативных сред наблюдается затухание волн ( $k_z'' < 0$ ), для усиливающих – усиление ( $k_z'' > 0$ ) как в областях пропускания (прозрачности), так и в запредельных областях частот. При этом величины затухания (и усиления) в запредельных областях частот существенно превышают эти параметры в полосе прозрачности. В области полосы пропускания коэффициент усиления  $k_z''/k_0 \sim \epsilon''/\epsilon'$  и сравнительно мал из-за малой величины параметра  $\epsilon''$ . В запредельной области частот, наоборот, наблюдается существенно большее усиление, величина которого растет при удалении от частоты отсечки.

На рис. 2 показаны дисперсионные характеристики электромагнитных волн в ионизированной среде в зависимости от величины нормированной частоты и от параметра активности среды. Параметр активности меняется в пределах  $\epsilon'' \approx -0,1 \dots 0,1$ , включая область усиления ( $\epsilon'' > 0$ ) и область диссипации ( $\epsilon'' < 0$ ). Действительная часть волнового числа  $k_z'/k_0$  зависит от параметра активности среды только в области малых значений его модуля  $|\epsilon''| < 0,05$ . Мнимая часть  $k_z''/k_0$  близка к нулю в области полосы пропускания и в запредельной области растет по модулю при удалении от частоты отсечки. В полосе пропускания ( $\omega_p/\omega < 1$ )  $|k_z''/k_z'| \ll 1$ , в запредельной области частот выполняется соотношение  $|k_z''/k_z'| \gg 1$ .

Таким образом, в запредельной области частот волны могут распространяться с большим коэффициентом усиления, с большой фазовой и малой групповой скоростями. Коэффициент усиления  $k_z''/k_0$  в малой степени зависит от абсолютного значения величины параметра  $\epsilon''$  и меняет знак при изменении знака.

В работе [8] показано, что при наличии электрического тока, приводящего к ионизации нейтральных атомов, выражение для диэлектрической проницаемости плазмы в сильном электрическом поле принимает вид

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega \frac{e}{im_e \mu_d}}, \quad (5)$$

где  $\mu_d = \partial u / \partial E$  – дифференциальная подвижность носителей зарядов;  $u$  – дрейфовая скорость.

В зависимости от знака параметра подвижности  $\mu_d$  носителей зарядов меняется знак параметра активности среды  $\epsilon''$ . В слабых полях при напряженности электрического поля, меньшей критического значения, дифференциальная проводимость положительна, среда проявляет диссипативные свойства, и волны затухают. При большой напряженности поля  $\epsilon'' > 0$  и среда обладает свойствами усиливающей среды.

На рис. 3 показаны дисперсионные характеристики для электромагнитной волны, распространяющейся в среде с диэлектрической проницаемостью (5).

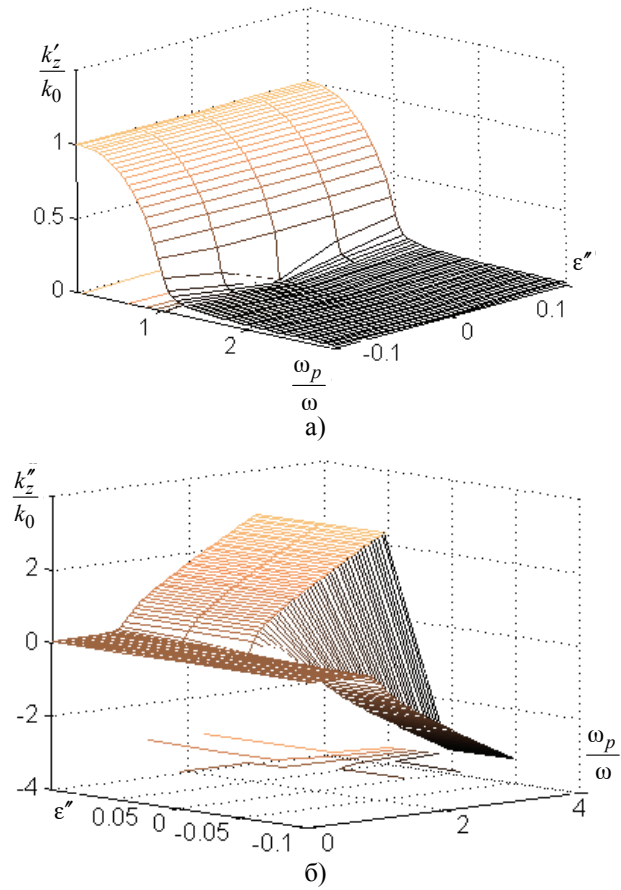


Рис. 2 Дисперсионные характеристики действительной (а) и мнимой (б) компонент волнового числа электромагнитных волн в зависимости от параметра активности среды

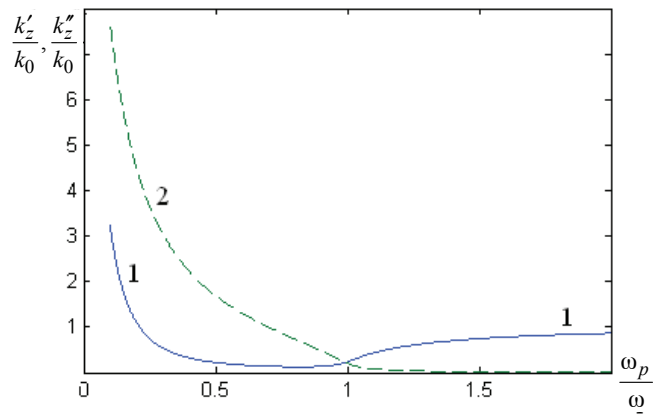


Рис. 3 Дисперсионные характеристики активной плазмы ( $k'_z/k_0 = 1$ ,  $k''_z/k_0 = 2$ )

За счет усиливающих свойств среды в запредельной области частот  $\omega/\omega_p < 1$  наблюдается усиление с коэффициентом усиления, существенно большим, чем коэффициент усиления в области полосы пропускания.

Изменение характера дисперсионных кривых электромагнитных волн в плазме (рис. 3), описываемой параметрами (5), по сравнению с дисперсионными кривыми для плазмы (рис. 1), описываемой параметрами (1), сводится к сильному изменению действительной части волнового числа  $k'_z/k_0$  в запрещенной области частот при удалении от критической частоты. Зависимость волнового числа от параметра активности и от частоты показана на рис. 4.

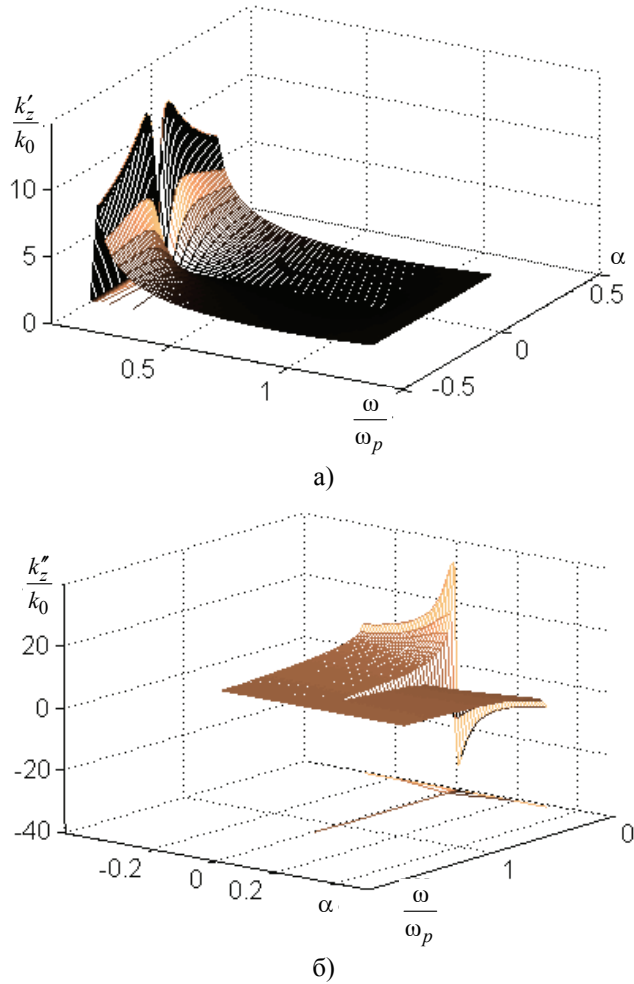


Рис. 4 Дисперсионные характеристики активной плазмы с параметрами (5) ( $\alpha = e/m_e \mu_d$  – параметр активности среды)

### 3 Волны в гиротропной среде (продольное подмагничивание)

Влияние внешнего магнитного поля проявляется в возникновении анизотропии среды, описываемой тензором диэлектрической проницаемости, который носит гиротропный характер. В постоянном магнитном поле, ориентированном вдоль оси  $Oz$ , диэлектрическая проницаемость неограниченной бесстолкновенной плазмы ( $\nu \ll \omega$ ) характеризуется асимметричным тензором второго ранга:

$$\|\varepsilon\| = \begin{bmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon_a & 0 \\ i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}$ ,  $\varepsilon_a = \frac{\omega_H}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2 - \omega^2}$ ,  $\varepsilon_z = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ ;  $\omega_p = e\sqrt{4\pi n/m}$  – плазменная частота,  $\omega_H = \gamma H_0 = \frac{ge}{2mc} H_0$ ;  $H_0$  – величина поля подмагничивания;  $g \approx 2$  – фактор спектроскопического расщепления.

Анализ уравнений Максвелла показывает наличие двух типов собственных волн с правой и левой круговой поляризацией. Волновые числа зависят от частоты:

$$k_z^\pm = k_0 \sqrt{\mu(\varepsilon \pm \varepsilon_a)} = k_0 \sqrt{\mu \frac{\omega(\omega \mp \omega_H) - \omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_H)}}. \quad (6)$$

Фазовые скорости каждой из этих волн:

$$v^\pm = \frac{\omega}{k_z^\pm} = \frac{c}{k_0 \sqrt{\mu(\varepsilon \pm \varepsilon_a)}} = \frac{c}{k_0 \sqrt{\mu \frac{\omega(\omega \mp \omega_H) - \omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_H)}}}.$$

Волны распространяются, если волновые числа и соответствующие им фазовые скорости являются действительными величинами. Для волн с правой и левой круговой поляризацией запердельные области частот не совпадают:

$$\omega_H < \omega < \frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_H}{2}\right)^2 + \omega_p^2}; \quad (7)$$

$$0 < \omega < -\frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_H}{2}\right)^2 + \omega_p^2}. \quad (8)$$

Это означает, что если в среде возбудить линейно поляризованную волну, распространяющуюся в направлении поля подмагничивания, то в зависимости от диапазона частот в среде будут распространяться:

– только волны с правой круговой поляризацией (в диапазоне частот (7), запердельных для волн с левой круговой поляризацией);

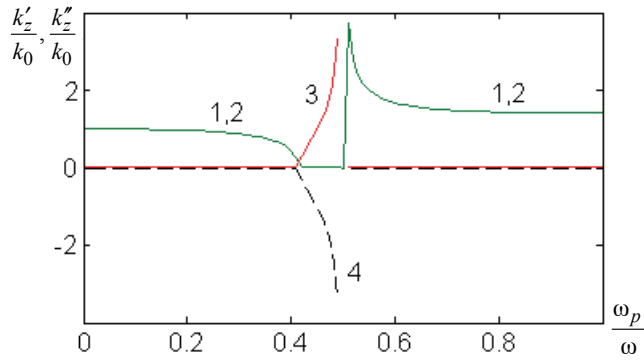
– только волны с левой круговой поляризацией (в диапазоне частот (8), запердельных для волн с правой круговой поляризацией);

– линейно поляризованные волны в остальных диапазонах частот.

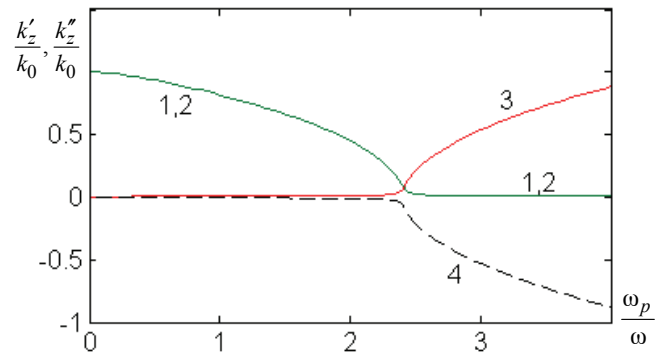
Одновременно будет наблюдаться поворот плоскости поляризации из-за различия скоростей распространения волн с правой круговой поляризацией и волн с левой круговой поляризацией.

На рис. 5,а показаны дисперсионные характеристики для волн с правой круговой поляризацией для активных и диссипативных сред с одинаковым по модулю параметром активности среды (для случая  $\omega_H = 2\omega_p$ ). Область час-

тот  $1/(1+\sqrt{2}) < \omega_p/\omega < 1/2$  является запредельной. В этой области наблюдается (в зависимости от знака параметра активности среды  $\epsilon''$ ): интенсивное усиление волн (кривая 3) или интенсивное затухание волн (кривая 4). Для волн левой круговой поляризации дисперсионные характеристики показаны на рис. 5,б.



а)



б)

Рис. 5 Дисперсионные характеристики волн с правой (а) и левой (б) круговой поляризацией (кривые 1, 2 –  $k'_z/k_0$ , кривая 3 –  $k''_z/k_0$  ( $\epsilon'' = 0,01$ ), кривая 4 –  $k''_z/k_0$ , ( $\epsilon'' = -0,01$ ),  $\omega_H = 2\omega_p$ )

Область частот  $1/(-1+\sqrt{2}) < \omega_p/\omega$  является запредельной. В запредельной области частот коэффициенты  $k''_z$  усиления (кривая 3) или ослабления (кривая 4) среды растут пропорционально величине сдвига относительно частоты отсечки. Коэффициенты усиления мало зависят от параметра активности среды  $\epsilon''$ .

#### 4 Волны в гиротропной среде (поперечное подмагничивание)

Рассмотрим распространение плоской волны вдоль оси  $Ox$  в случае поперечного подмагничивания (вектор постоянного магнитного поля направлен вдоль оси  $Oz$ ,  $\mathbf{H}_0 = e_z H_0$ ). Задача сводится к решению волнового уравнения для компоненты электрического поля  $E_z$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_0^2 \epsilon_z \mu E_z = 0,$$

описывающего плоскую «обыкновенную» волну с компонентами  $E_z$ ,  $H_x$ ,  $H_y$ , решение которого ищется в виде распространяющейся вдоль оси  $Ox$  волны

$$E_z(x, t) = E_{z0} \cdot \exp[i(\omega t - k_x x)].$$

Физические свойства обыкновенной волны аналогичны волнам в неподмагниченной плазме.

«Необыкновенная» волна с компонентами  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_z$  характеризуется постоянной распространения:

$$k_x = k_0 \sqrt{\mu \frac{[\omega(\omega - \omega_H) - \omega_p^2] \cdot [\omega(\omega + \omega_H) - \omega_p^2]}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_H^2 - \omega_p^2)}},$$

где  $\epsilon_{\perp} = (\epsilon^2 - \epsilon_a^2) \epsilon^{-1}$ .

Две запердельные области частот расположены в диапазонах:

$$0 < \omega < -\frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_H}{2}\right)^2 + \omega_p^2};$$

$$\sqrt{\omega_H^2 + \omega_p^2} < \omega < \frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_H}{2}\right)^2 + \omega_p^2}.$$

Для необыкновенных волн дисперсионные характеристики показаны на рис. 6 для параметров  $\omega_p/\omega_H = 2$ ,  $\epsilon'' = 0,01$ ,  $\mu = 1$ . В областях частот

$$1/(1 + \sqrt{2}) < \omega_p/\omega < 1/2, \quad 1/(-1 + \sqrt{2}) < \omega_p/\omega$$

находятся области с коэффициентом усиления  $k_x''/k_0 > 1$ .

Усиление наблюдается во всей полосе частот, где  $\epsilon'' > 0$ . В полосах пропускания коэффициент усиления при малом параметре  $\epsilon''$  также малый:  $|k_z''/k_z'| \ll 1$ . В полосах задерживания выполняется соотношение:  $|k_z''/k_z'| \gg 1$ .

### Заключение

В дисперсных средах имеются области частот, в которых волны не могут распространяться (запердельные области частот). Введение усиливающих компонент сред приводит к их просветлению и усилению волн с высоким коэффициентом усиления при малых параметрах активности сред. Анизотропия параметров сред приводит к появлению дополнительных запердельных частотных полос, в которых при введении усиливающих сред наблюдается просветление сред с большим усилением волн.

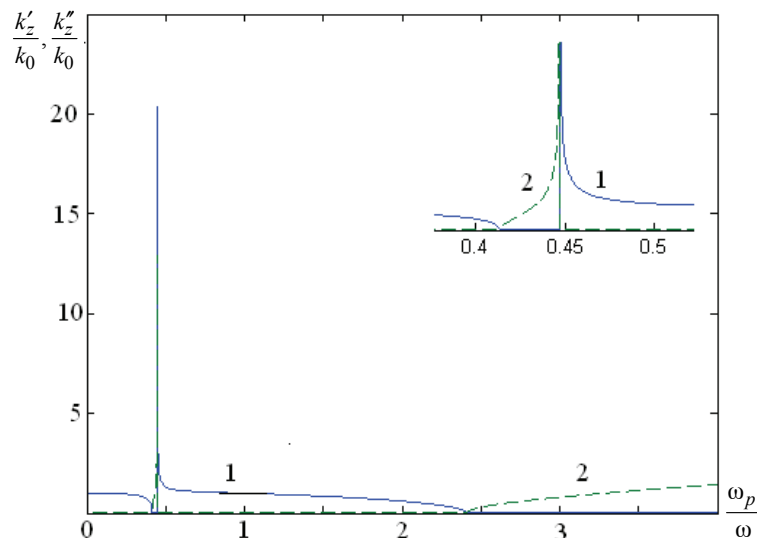


Рис. 6 Дисперсионные характеристики необыкновенных волн в гиротропной среде (1 –  $k'_x/k_0$ , 2 –  $k''_x/k_0$ )

#### Список литературы

1. **Никольский, В. В.** Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М. : Наука, 1989. – 544 с.
2. **Туров, Е. А.** Материальные уравнения электродинамики / Е. А. Туров. – М. : Наука, Физматгиз, 1983. – 160 с.
3. **Пименов, Ю. В.** Техническая электродинамика / Ю. В. Пименов, В. И. Вольман, А. Д. Муравцов. – М. : Радио и связь, 2002. – 536 с.
4. **Гуревич, А. Г.** Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках / А. Г. Гуревич. – М. : Наука, 1973. – 592 с.
5. **Бурсиан, Э. В.** Когерентные эффекты в сегнетоэлектриках / Э. В. Бурсиан, Я. Г. Гиршберг. – М. : Прометей, 1989. – 197 с.
6. **Басс, Ф. Г.** Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками / Ф. Г. Басс, А. А. Булгаков, А. П. Тетервов. – М. : Наука, 1989. – 195 с.
7. **Стил, М.** Взаимодействие волн в плазме твердого тела / М. Стил, Б. Вюраль. – М. : Атомиздат, 1973. – 248 с.
8. **Орешко, А. Г.** // Вопросы атомной науки и техники. – 2003. – № 4. – С. 262–264. – (Плазменная электроника и новые методы ускорения).
9. **Шур, М.** Современные приборы на основе арсенида галлия / М. Шур. – М. : Мир, 1991.
10. **Альперин, М. М.** Введение в физику двухуровневых систем / М. М. Альперин, Я. Д. Клубис, А. И. Хижняк. – Киев : Наукова думка, 1987. – 224 с.
11. **Кузнецова, Т. И.** // Квантовая электроника. – 2000. – Т. 30. – № 3. – С. 257–260.
12. **Глущенко, А. Г.** Запредельные волноводные структуры и среды с усилением / А. Г. Глущенко, Е. П. Захарченко. – Самара : Сам. НЦ РАН, 2009. – 170 с.
13. **Блиох К. Ю.,** Блиох Ю. П. // УФН. – Т. 174. – В. 4. – 2004.



**Глущенко Александр Григорьевич**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
физики, декан факультета базового  
телекоммуникационного образования,  
Поволжский государственный  
университет телекоммуникаций  
и информатики (г. Самара)

E-mail: gag@psati.ru

**Захарченко Евгения Павловна**  
старший преподаватель, кафедра физики,  
Поволжский государственный  
университет телекоммуникаций  
и информатики (г. Самара)

E-mail: zep646@yandex.ru

**Glushchenko Alexander Grigoryevich**  
Doctor of physico-mathematical sciences,  
professor, head of sub-department  
of physics, dean of the department of basic  
telecommunication training, Volga region  
state university of telecommunications  
and computer science

**Zakharchenko Evgeniya Pavlovna**  
Senior lecturer, sub-department  
of physics, Volga region state  
university of telecommunications  
and computer science

---

УДК 535.5

**Глущенко, А. Г.**

**О возможности просветления сред в запердельных областях частот /**  
А. Г. Глущенко, Е. П. Захарченко // Известия высших учебных заведений.  
Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). –  
С. 118–129.

В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов,  
А. В. Разумов, З. А. Гаврина, П. В. Кревчик

## ДВУХФОТОННАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ 1D-ДИССИПАТИВНОГО ТУННЕЛИРОВАНИЯ В КВАНТОВЫХ МОЛЕКУЛАХ С D<sup>-</sup>-ЦЕНТРАМИ

*Аннотация.* В одноинстантонном приближении проведено теоретическое исследование влияния электрического поля на процесс туннелирования в квантовой молекуле с D<sup>-</sup>-центром. Показано, что наличие электрического поля приводит к трансформации двухъямного потенциала и, как следствие, к появлению на полевой зависимости вероятности туннелирования резонансного пика, когда двухъямный осцилляторный потенциал становится симметричным. Найдено, что данная особенность может быть идентифицирована в спектрах двухфотонного примесного поглощения.

*Ключевые слова:* диссипативное туннелирование, двухфотонная спектроскопия.

*Abstract.* Theoretical investigation of the electric field influence on tunnel process in quantum molecule with D<sup>-</sup>-center is fulfilled in one – instanton approximation. It is shown, that the presence of electric field leads to the double – well transformation, and, as consequence, to appearance of the resonance peak on the tunnel probability field dependence, when the double – well oscillator potential become a symmetric one. It is found, than such feature can be identified in spectra of two – photon impurity absorption.

*Keywords:* dissipative tunneling, two – photon spectroscopy.

### Введение

В настоящее время двухфотонная (ДФ) спектроскопия широко применяется для исследования зонной структуры низкоразмерных систем как разрушающий метод считывания информации в устройствах трехмерной оптической памяти для изучения когерентных свойств излучения, а также в целом ряде приложений. Развитие технологии получения квантовых молекул (КМ) (туннельно-связанных квантовых точек (КТ)) требует расширения возможностей ДФ спектроскопии, в частности, применительно к исследованию особенностей диссипативного туннелирования. Необходимо отметить, что квантовое туннелирование оказывается важным при исследовании электронного транспорта через молекулярные нити, структуры с КТ или квантовыми ямами, а также в низкотемпературных химических реакциях [1–6]. Для рассмотрения таких систем удобным оказывается применение инстантонного подхода. Использование науки о квантовом туннелировании с диссипацией для изучения взаимодействия КМ с контактной средой оказывается продуктивным, поскольку, несмотря на использование инстантонных подходов, появляется возможность получить основные результаты в аналитической форме с учетом влияния среды на процесс туннельного переноса, что в других часто используемых подходах не представляется возможным.

Цель работы заключается в теоретическом изучении особенностей ДФ примесного поглощения света, связанных с влиянием электрического поля на процесс 1D-туннелирования в КМ.

Энергия связи  $D^-$ -состояния в электрическом поле

Рассмотрим полупроводниковую КТ, содержащую  $D^-$ -центр и находящуюся в электрическом поле напряженностью  $\vec{E}_0$ . Вычисления проведем в декартовых координатах.

Для описания одноэлектронных состояний в КТ используем потенциал конфайнмента в виде трехмерной осцилляторной ямы:

$$V_0(x, y, z) = \frac{m^* \omega_0^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{2}, \quad (1)$$

где  $m^*$  – эффективная масса электрона;  $\omega_0$  – характерная частота осциллятора.

Волновая функция и энергетический спектр одноэлектронных состояний будут иметь вид

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = 2^{-\frac{n_1+n_2+n_3}{2}} \frac{1}{(n_1! n_2! n_3!)} \frac{1}{2} \pi^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{a_0^2} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}{2a_0^2}\right] \times \\ \times H_{n_1}\left(\frac{x-x_0}{a_0}\right) H_{n_2}\left(\frac{y}{a_0}\right) H_{n_3}\left(\frac{z}{a_0}\right); \quad (2)$$

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar \omega_0 \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right) - \frac{|e|^2 E_0^2}{2m^* \omega_0^2}, \quad (3)$$

здесь  $x_0 = |e| E_0 / m^* \omega_0^2$ ,  $a_0 = \sqrt{\hbar / m^* \omega_0}$ ,  $H_n(x)$  – полином Эрмита.

Потенциал  $D^-$ -центра моделируется потенциалом нулевого радиуса мощностью  $\gamma = 2\pi\hbar^2 / (\alpha m^*)$ :

$$V_\delta = \gamma \delta(x-x_a) \delta(y-y_a) \delta(z-z_a) \left[1 + (x-x_a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_a) \frac{\partial}{\partial y} + (z-z_a) \frac{\partial}{\partial z}\right], \quad (4)$$

где  $x_a, y_a, z_a$  – координаты  $D^-$ -центра.

В приближении эффективной массы волновая функция  $\Psi_\lambda(x, y, z; x_a, y_a, z_a)$  связанного состояния  $D^-$ -центра в КТ с параболическим потенциальным профилем, находящейся в магнитном поле, удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$\left(\hat{H}_{QD} + V_\delta(x, y, z; x_a, y_a, z_a)\right) \Psi_\lambda(x, y, z; x_a, y_a, z_a) = \\ = E_\lambda \Psi_\lambda(x, y, z; x_a, y_a, z_a), \quad (5)$$

где гамильтониан  $\hat{H}_{QD}$  определяется выражением

$$\hat{H}_{QD} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \frac{m^* \omega_0^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{2} - |e| E x. \quad (6)$$

Для нахождения дисперсионного уравнения и вида волновой функции локализованного на  $D^0$ -центре электрона перейдем к интегральной формулировке задачи.

Уравнение Липпмана – Швингера для связанного состояния запишется в виде

$$\Psi_{\lambda}(x, y, z; x_a, y_a, z_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, z; x_a, y_a, z_a; E_{\lambda}) V_{\delta}(x, y, z; x_a, y_a, z_a) \times \Psi_{\lambda}(x, y, z; x_a, y_a, z_a) dx dy dz, \quad (7)$$

здесь  $G(x, y, z; x_a, y_a, z_a; E_{\lambda})$  – одноэлектронная функция Грина, которая определяется следующим выражением:

$$G(x, y, z; x_a, y_a, z_a; E_{\lambda}) = \sum_{n_1 n_2 n_3} \frac{\Psi_{n_1 n_2 n_3}^*(x, y, z) \Psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z)}{E_{\lambda} - E_{n_1 n_2 n_3}}. \quad (8)$$

После подстановки в (7) выражения для потенциала нулевого радиуса (4) получим

$$\Psi_{\lambda}(x, y, z; x_a, y_a, z_a) = \gamma G(x, y, z; x_a, y_a, z_a; E_{\lambda}) (\mathbf{T} \Psi_{\lambda})(x, y, z; x_a, y_a, z_a), \quad (9)$$

где оператор  $\mathbf{T}$  имеет вид

$$\mathbf{T} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_a \\ y \rightarrow y_a \\ z \rightarrow z_a}} \left[ 1 + (x - x_a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_a) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z_a) \frac{\partial}{\partial z} \right]. \quad (10)$$

Действуя оператором  $\mathbf{T}$  на обе части соотношения (9), получаем уравнение, определяющее зависимость энергии связи  $D^-$ -состояния от параметров КТ и величины напряженности электрического поля.

$$\alpha = \frac{2\pi\hbar^2}{m^*} (\mathbf{T}G)(x_a, y_a, z_a, x_a, y_a, z_a; E_{\lambda}), \quad (11)$$

здесь  $\alpha$  определяется энергией  $E_i$  связанного состояния этого же  $D^-$ -центра в объемном полупроводнике.

С учетом выражения для одночастичных волновых функций (2) и энергетического спектра (3) выражение (8) для функции Грина можно переписать в виде

$$G(x, y, z; x_a, y_a, z_a; E_{\lambda}) = \frac{1}{\pi^2 a_0^3} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2 + y^2 + z^2 + (x_a - x_0)^2 + y_a^2 + z_a^2}{2a_0^2} \right] \times \int_0^{\infty} \exp \left[ -\left( \beta (\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{2} \right) t \right] \sum_{n_1=0}^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{2} \right)^{n_1} (n_1!)^{-1} H_{n_1} \left( \frac{x - x_0}{a_0} \right) H_{n_1} \left( \frac{x_a - x_0}{a_0} \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{n_2=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{2}\right)^{n_2} (n_2!)^{-1} H_{n_2}\left(\frac{y}{a_0}\right) H_{n_2}\left(\frac{y_a}{a_0}\right) \times \\ & \times \sum_{n_3=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{2}\right)^{n_3} (n_3!)^{-1} H_{n_3}\left(\frac{z}{a_0}\right) H_{n_3}\left(\frac{z_a}{a_0}\right) dt, \end{aligned} \quad (12)$$

здесь введены обозначения  $|E_\lambda|/E_d = \eta^2$ ,  $W_0^* = |e|^2 E_0^2 / (2m^* \omega_0^2 E_d)$ ,  
 $\beta = E_d / \hbar \omega_0$ .

Вычисление сумм в (12) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} G(x, y, z; x_a, y_a, z_a; E_\lambda) &= -\frac{1}{\frac{3}{\pi^2} a_0^3 E_d} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2 + (x_a-x_0)^2 + y_a^2 + z_a^2}{2a_0^2}\right] \int_0^\infty \exp\left[-\left(\beta(\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{2}\right)t\right] \times \\ & \times (1-e^{-2t})^{-\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{2((x-x_0)(x_a-x_0) + yy_a + zz_a)e^{-t}}{a_0^2(1-e^{-2t})}\right] \times \\ & \times \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (x_a-x_0)^2 + y^2 + y_a^2 + z^2 + z_a^2}{a_0^2(1-e^{-2t})} e^{-2t}\right] dt. \end{aligned} \quad (13)$$

После выделения в (13) расходящейся части имеем

$$\begin{aligned} G(x, y, z; x_a, y_a, z_a; E_\lambda) &= -\frac{\beta}{\frac{3}{\pi^2} a_0^3 E_d} \left\{ \int_0^\infty \exp\left[-\left(\beta(\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{2}\right)t\right] \times \right. \\ & \times \left( (1-e^{-2t})^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2 + (x_a-x_0)^2 + y_a^2 + z_a^2}{2a_0^2} \cdot \frac{1+e^{-2t}}{1-e^{-2t}}\right] \times \right. \\ & \times \exp\left[\frac{(x-x_0)(x_a-x_0) + yy_a + zz_a}{a_0^2} \cdot \frac{2e^{-t}}{1-e^{-2t}}\right] - \\ & \left. \left. -t \frac{3}{2} \exp\left[\frac{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2}{2a_0^2 t}\right] \right) dt + \right. \end{aligned}$$

$$+\sqrt{2}a_0 \frac{\exp \left[ -\sqrt{\frac{(2\beta(\eta^2 - W_0^*) + 3)((x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2)}{a_0^2}} \right]}{\sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2}} \quad (14)$$

Подставляя выражение для функции Грина (14) в (11) и выполняя необходимые предельные переходы, получаем дисперсионное уравнение для  $D^-$ -состояния в КТ:

$$\sqrt{\eta^2 - W_0^* + \frac{3}{2\beta}} = \eta_i - \sqrt{\frac{2}{\pi\beta}} \int_0^\infty \exp \left[ -\left( \beta(\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{2} \right) t \right] \left\{ \frac{1}{2t\sqrt{2t}} - (1 - e^{-2t})^{-\frac{3}{2}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left( -\frac{(x_a^* - x_0^*)^2 + y_a^{*2} + z_a^{*2}}{a_0^{*2}} \cdot \frac{1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}} \right) \right\} dt, \quad (15)$$

где  $\eta_i$  – параметр, определяющий энергию связи того же  $D^-$ -состояния в объемном полупроводнике.

Энергия связи  $D^-$ -состояния  $E_\lambda^{QD}$ , из-за наличия квантового размерного эффекта, должна, вообще говоря, отсчитываться от уровня энергии основного состояния КТ:

$$E_\lambda^{QD} / E_d = \begin{cases} \eta^2 + 3/(2\beta) - W_0^*, & E_\lambda < 0, \\ -\eta^2 + 3/(2\beta) - W_0^*, & E_\lambda > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Первая строка в (16) соответствует случаю расположения примесного уровня ниже дна КТ ( $\eta^2 > 0$ ), а вторая – между дном удерживающего потенциала и уровнем энергии основного состояния КТ ( $\eta^2 < 0$ ).

На рис. 1 представлены результаты компьютерного анализа уравнения (16) применительно к  $D^{(-)}$ -состояниям в InSb КТ. Можно видеть, что в обоих случаях  $\eta^2 > 0$  (рис. 1,а) и  $\eta^2 < 0$  (рис. 1,б) энергия связи  $D^{(-)}$ -состояния в электрическом поле уменьшается за счет штарковского сдвига по энергии и поляризации  $D^{(-)}$ -центра. Видно также, что примесный уровень может существовать и при нулевой мощности потенциала нулевого радиуса, т.е. когда параметр  $\eta_i^2 = 0$ , что связано с наличием удерживающего потенциала КТ.

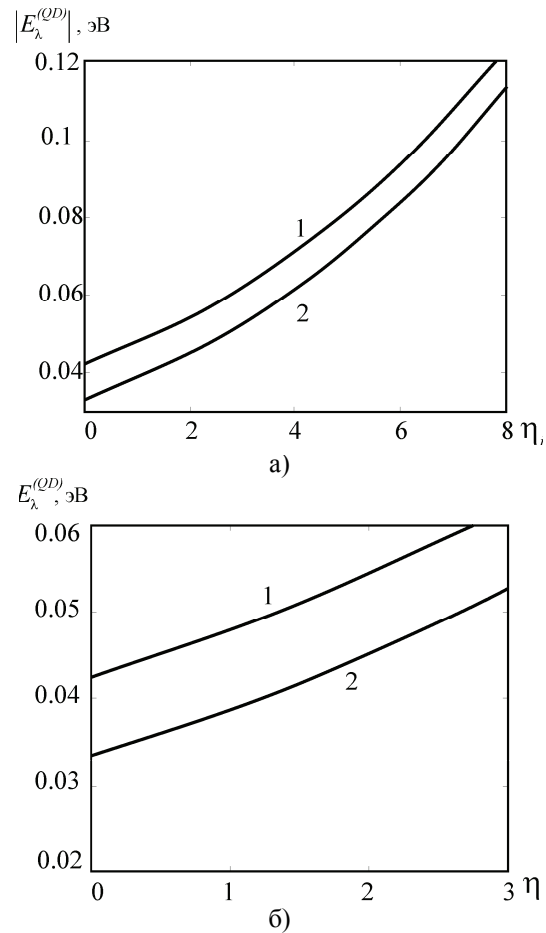


Рис. 1 Зависимость энергии связи  $D^-$ -состояния в КТ от параметра  $\eta_i$  при наличии внешнего электрического поля  $E_0$ : 1 –  $E_0 = 0$ ; 2 –  $E_0 = 10^6$  В/м при  $R_0^* = 1$ ,  $x_a^*, y_a^*, z_a^* = 0$ : а –  $\eta_i > 0$  ( $U_0^* = 250$ ); б –  $\eta_i < 0$  ( $U_0^* = 450$ )

### Особенности 1D-диссипативного туннелирования в спектрах двухфотонного поглощения

Рассмотрим поглощение света при ДФ ионизации  $D^{(-)}$ -центра для случая, когда примесный атом расположен в центре КТ  $\vec{R}_a = (0, 0, 0)$ .

Волновая функция начального состояния определяется следующим выражением:

$$\Psi_\lambda(x, y, z; 0, 0, 0) = C \frac{\beta}{\pi^2} \int_0^\infty \exp \left[ - \left( \beta (\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{2} \right) t \right] (1 - e^{-2t})^{\frac{3}{2}} \times \\ \times \exp \left[ - \frac{(x - x_0)^2 + x_0^2 + y^2 + z^2}{2a_0^2} \cdot \frac{1 + e^{-2t}}{1 - e^{-2t}} \right] \exp \left[ - \frac{(x - x_0)x_0}{a_0^2} \cdot \frac{2e^{-t}}{1 - e^{-2t}} \right], \quad (17)$$

где нормировочный множитель  $C$  дается выражением вида

$$C = \left[ \frac{a_0^3 \exp\left(\frac{x_0^2}{a_0^2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + \frac{7}{4}\right)}{\pi\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + 1\right)} \right] \times \\ \times \left[ \left( \frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{4} \right) \left( \Psi\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + \frac{7}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + 1\right) \right) - 1 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Волновая функция конечного состояния берется в виде (2). В выражении для энергетического спектра учтем лоренцево размытие уровней:

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar\omega_0 \left( n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right) - \frac{|e|^2 E_0^2}{2m^* \omega_0^2} + i\hbar\Gamma_0, \quad (19)$$

здесь  $\Gamma_0$  – ширина уровня.

Гамильтониан взаимодействия с полем электромагнитной волны берется в виде

$$\hat{H}_{\text{int}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2 \alpha^* I_0}{m^{*2} \omega}} \exp(i\vec{q}\vec{r}) (\vec{e}_\lambda \vec{p}), \quad (20)$$

где  $\vec{e}_\lambda$  – единичный вектор поляризации;  $\vec{q}$  – волновой вектор;  $\lambda_0$  – коэффициент локального поля;  $\alpha^*$  – постоянная тонкой структуры с учетом диэлектрической проницаемости;  $I_0$ ,  $\omega$  – интенсивность и частота света.

Матричный элемент ДФ оптического перехода с учетом лоренцева уширения [5, 6]:

$$M = \sum_{n'_1 n'_2 n'_3} \frac{\langle \Psi_{n_1 n_2 n_3} | \mathbf{H}_{\text{int}} | \Psi_{n'_1 n'_2 n'_3} \rangle \langle \Psi_{n'_1 n'_2 n'_3} | \mathbf{H}_{\text{int}} | \Psi_\lambda \rangle}{|E_\lambda| + E_{n'_1 n'_2 n'_3} - \hbar\omega}, \quad (21)$$

где  $\Psi_{n'_1 n'_2 n'_3}$  и  $E_{n'_1 n'_2 n'_3}$  – волновая функция и энергия виртуального состояния.

Выражение для матричного элемента  $\langle \Psi_{n'_1 n'_2 n'_3} | \hat{H}_{\text{int}} | \Psi_\lambda \rangle$  можно представить в виде

$$\langle \Psi_{n'_1 n'_2 n'_3} | \mathbf{H}_{\text{int}} | \Psi_\lambda \rangle = i\lambda_0 \left( \frac{2\pi\alpha^* I_0}{\omega\pi^6 n'_1 n'_2 n'_3} \right)^{\frac{1}{2}} (E_{n'_1 n'_2 n'_3} - E_\lambda) \times \\ \times \left[ \frac{\exp\left(\frac{x_0^2}{a_0^2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + \frac{7}{4}\right)}{\pi\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + 1\right)} \right] \times$$



$$\begin{aligned}
& \times \left[ \left( \frac{\beta}{2} (\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{4} \right) \left( \Psi \left( \frac{\beta}{2} (\eta^2 - W_0^*) + \frac{7}{4} \right) - \Psi \left( \frac{\beta}{2} (\eta^2 - W_0^*) + 1 \right) \right) - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\
& \times \beta a_0^{-3} 2^{-\frac{n'_1+n'_2+n'_3}{2}} \int_0^\infty (1 - e^{-2t})^{-\frac{3}{2}} \exp \left[ - \left( \beta (\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{2} \right) t \right] \times \\
& \times \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp \left[ - \frac{(x-x_0)x_0}{a_0^2} \cdot \frac{2e^{-t}}{1-e^{-2t}} - \frac{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}{2a_0^2} \right] \times \\
& \times \exp \left[ - \frac{(x-x_0)^2 + x_0^2 + y^2 + z^2}{2a_0^2} \cdot \frac{1+e^{-2t}}{1-e^{-2t}} \right] \times \\
& \times x \cdot H_{n'_1} \left( \frac{x-x_0}{a_0} \right) H_{n'_2} \left( \frac{y}{a_0} \right) H_{n'_3} \left( \frac{z}{a_0} \right) dx dy dz dt. \quad (22)
\end{aligned}$$

Вычисление интегралов в (22) приводит к следующему выражению для матричного элемента:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{n'_1 m'_2 m'_3} | \mathbf{H}_{\text{int}} | \Psi_\lambda \rangle &= i \lambda_0 \left( \frac{\alpha^* I_0 E_d^2}{\omega n'_1! (2m'_2)! (2m'_3)!} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
& \times \left[ \frac{\exp \left( \frac{x_0^{*2}}{a_0^2} \right) \Gamma \left( \frac{\beta}{2} (\eta^2 - W_0^*) + \frac{7}{4} \right)}{\pi \left( \frac{\beta}{2} (\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{4} \right) \Gamma \left( \frac{\beta}{2} (\eta^2 - W_0^*) + 1 \right)} \right] \times \\
& \times \left[ \left( \frac{\beta}{2} (\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{4} \right) \left( \Psi \left( \frac{\beta}{2} (\eta^2 - W_0^*) + \frac{7}{4} \right) - \Psi \left( \frac{\beta}{2} (\eta^2 - W_0^*) + 1 \right) \right) - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\
& \times a_d a_0^* n_1! \pi^{-1} 2^{-\frac{n'_1+2m'_2+2m'_3-1}{2}} \left( n'_1 + 2m'_2 + 2m'_3 + \frac{3}{2} + \left( \eta^2 - W_0^* + i \frac{\hbar \Gamma}{E_d} \right) \beta \right) \times \\
& \times \int_0^\infty (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ - \left( \beta (\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{2} \right) t \right] \times \\
& \times \sum_{m=0}^{\left[ \frac{n_1}{2} \right]} \frac{(-1)^{m+n'_1+m'_2+m'_3} f(x_0^*, t)^{n_1-2m} \exp \left( \frac{f(x_0^*, t)}{4} - (2m'_2 + 2m'_3) t \right) (2m'_2)! (2m'_3)!}{m! (n'_1 - 2m)! m'_2! m'_3!} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \delta_{n'_2, 2m'_2} \delta_{n'_3, 2m'_3} \left[ x_0^* (n'_1 - 2m) \sum_{k=0}^{\left[ \frac{n'_1 - 2m}{2} \right]} \frac{f(x_0^*, t)^{-k}}{(n'_1 - 2m - 2k)! k!} - \right. \\ & \left. - a_0^* (n'_1 - 2m + 1) \sum_{k=0}^{\left[ \frac{n'_1 - 2m + 1}{2} \right]} \frac{f(x_0^*, t)^{-k+1}}{2(n'_1 - 2m - 2k + 1)! k!} \right] dt, \quad (23) \end{aligned}$$

здесь  $a_0^* = a_0/a_d$ ,  $x_0^* = x_0/a_d$ ,  $x^* = x/a_d$ ,  $y^* = y/a_d$ ,  $z^* = z/a_d$ .

Матричный элемент, определяющий величину силы осциллятора дипольных оптических переходов электрона из виртуальных состояний  $\Psi_{n'_1 m'_2 m'_3}(x, y, z)$  в конечные состояния  $\Psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z)$  дискретного спектра КТ, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{n_1 n_2 n_3} | \mathbf{H}_{\text{int}} | \Psi_{n'_1 m'_2 m'_3} \rangle &= i\lambda_0 \frac{\sqrt{\alpha^* I_0 2^{-(n_1+n_2+n_3+n'_1+2m'_2+2m'_3+1)} (E_{n_1 n_2 n_3} - E_{n'_1 m'_2 m'_3})}}{a_0^{*3} \sqrt{\omega \pi^2 n_1! n_2! n_3! n'_1! (2m'_2)! (2m'_3)!}} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^* \exp \left( -\frac{(x^* - x_0^*)^2 + y^{*2} + z^{*2}}{a_0^{*2}} \right) H_{n'_1} \left( \frac{x^* - x_0^*}{a_0^*} \right) \times \\ & \times H_{n_1} \left( \frac{x^* - x_0^*}{a_0^*} \right) H_{n'_2} \left( \frac{y^*}{a_0^*} \right) H_{n_2} \left( \frac{y^*}{a_0^*} \right) H_{n'_3} \left( \frac{z^*}{a_0^*} \right) H_{n_3} \left( \frac{z^*}{a_0^*} \right) dx^* dy^* dz^*. \quad (24) \end{aligned}$$

После интегрирования для (24) имеем

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{n_1 n_2 n_3} | \hat{H}_{\text{int}} | \Psi_{n'_1 m'_2 m'_3} \rangle &= i\lambda_0 \pi^2 a_0^* E_d \times \\ & \times \frac{\left( \alpha^* I_0 2^{-4(n_1+n_2+n_3)} \right)^{\frac{1}{2}} \beta(n_1! n_2! n_3!)^{\frac{1}{2}}}{2(\omega(n_1-1)!(n_2)!(n_3)!)^{\frac{1}{2}}} \delta_{n_1, n'_1+1} \delta_{n_2, 2m'_2} \delta_{n_3, 2m'_3}. \quad (25) \end{aligned}$$

После суммирования в (21) по виртуальным состояниям для квадрата модуля матричного элемента  $|M|^2 = MM^*$  получим:

$$|M|^2 = \frac{\left[ \left( \beta^{-1} \left( n_1 + n_2 + n_3 + \frac{1}{2} \right) - W_0^* + \eta^2 \right)^2 + \frac{\hbar^2 \Gamma^2}{E_d^2} \right] a_0^{*4} a_d^4 \beta^4 I_0^2 \pi^{-1} \lambda_0^4 \alpha^{*2} \hbar^2}{\left[ \left( \beta^{-1} \left( n_1 + n_2 + n_3 + \frac{1}{2} \right) - W_0^* + \eta^2 - X \right)^2 + \frac{\hbar^2 \Gamma^2}{E_d^2} \right] \left[ \left( \frac{n_2}{2} \right)! \left( \frac{n_3}{2} \right)! \right]^2 X^2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \frac{\exp\left(\frac{x_0^{*2}}{a_0^{*2}}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + \frac{7}{4}\right)}{\pi\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + 1\right)} \right] \times \\
& \times \left[ \left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + \frac{3}{4}\right) \left(\Psi\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + \frac{7}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta}{2}(\eta^2 - W_0^*) + 1\right)\right) - 1 \right]^{-1} \times \\
& \times 2^{-5(n_1+n_2+n_3)-3} n_1! n_2! n_3! \times \int_0^\infty (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\left(\beta(\eta^2 - W_0^*) + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right)t\right] \times \\
& \times \sum_{m=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]} (-1)^m f(x_0^*, t) \frac{\exp\left[\frac{f(x_0^*, t)}{4}\right]}{m!(n_1 - 2m - 1)!} \times \\
& \times \left[ x_0^*(n_1 - 2m - 1) \sum_{k=0}^{\left[\frac{n_1 - 2m - 1}{2}\right]} \frac{f(x_0^*, t)^{-k}}{(n_1 - 2m - 2k - 1)! k!} - \right. \\
& \left. - a_0^*(n_1 - 2m) \sum_{k=0}^{\left[\frac{n_1 - 2m}{2}\right]} \frac{f(x_0^*, t)^{-k+1}}{2(n_1 - 2m - 2k)! k!} \right] dt \Bigg|^2. \quad (26)
\end{aligned}$$

Вероятность ДФ ионизации  $D^-$ -центра в КТ  $W(2\omega)$  с параболическим потенциалом конфинмента при наличии внешнего электрического поля с учетом лоренцева уширения энергетических уровней виртуальных и конечных состояний КТ:

$$\begin{aligned}
W(2\omega) &= B_0 \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{\left[ (\beta^{-1}(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{1}{2}) - W_0^* + \eta^2)^2 + \hbar^2 \Gamma_0^2 / E_d^2 \right] X^{-2}}{\left[ (\beta^{-1}(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{1}{2}) - W_0^* + \eta^2 - X)^2 + \hbar^2 \Gamma_0^2 / E_d^2 \right]} \times \\
& \times \frac{1}{((n_2/2)!(n_3/2)!)^2} \left\{ \frac{\exp(x_0^{*2}/a_0^{*2}) \Gamma(\beta(\eta^2 - W_0^*)/2 + 7/4)}{\pi(\beta(\eta^2 - W_0^*)/2 + 3/4) \Gamma(\beta(\eta^2 - W_0^*)/2 + 1)} \times \right. \\
& \left. \times \left[ (\beta(\eta^2 - W_0^*)/2 + 3/4) (\psi(\beta(\eta^2 - W_0^*)/2 + 7/4) - \psi(\beta(\eta^2 - W_0^*)/2 + 1)) - 1 \right]^{-1} \right\} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times 2^{-5(n_1+n_2+n_3)-3} \cdot n_1!n_2!n_3! \left| \int_0^\infty dt (1-e^{-2t})^{-1/2} \exp\left[-(\beta(\eta^2 - W_0^*) + n_2 + n_3 + 3/2)t\right] \times \right. \\
 & \quad \times \sum_{m=0}^{[n_1/2]} (-1)^m f(x_0^*, t) \frac{\exp(f(x_0^*, t)/4)}{m!(n_1 - 2m - 1)!} \left[ x_0^*(n_1 - 2m - 1) \times \right. \\
 & \quad \left. \left. \sum_{k=0}^{[(n_1-2m-1)/2]} \frac{f(x_0^*, t)^{-k}}{(n_1 - 2m - 2k - 1)!k!} - a_0^*(n_1 - 2m) \sum_{k=0}^{[(n_1-2m)/2]} \frac{f(x_0^*, t)^{1-k}}{2(n_1 - 2m - 2k)!k!} \right] \right|^2 \times \\
 & \quad \times \frac{\Gamma_0}{(3\beta^{-1}/2 - W_0^* + \eta^2 - X)^2 + \hbar^2 \Gamma_0^2 / E_d^2}, \quad (27)
 \end{aligned}$$

где  $B_0 = 2(a_0^* \beta \lambda_0)^4 (a_d \alpha^*)^2 \hbar I_0 / E_d$ ;  $\lambda_0$  – коэффициент локального поля;  $\alpha^*$  – постоянная тонкой структуры с учетом диэлектрической постоянной КТ;  $I_0$  – интенсивность света;  $X = \hbar\omega / E_d$  – энергия фотона в единицах эффективной боровской энергии;  $f(x_0^*, t) = x_0^{*2} (2e^{-t} + e^{-2t}) / a_0^{*2}$ ;  $\Gamma_0$  – величина размытия уровня;  $\psi(x)$  – логарифмическая производная  $\Gamma$ -функции. Процесс вычисления выявил следующие правила отбора: оптические переходы с примесного уровня возможны только в размерно-квантованные состояния КТ с четными значениями квантовых чисел  $n_2, n_3$  и со значением квантового числа  $n_1 = n'_1 + 1$  ( $n' = 0, 1, 2, \dots$ ).

Величина размытия энергетического уровня  $\Gamma_0$  будет определяться процессом туннельного перехода в КМ. Проведем расчет вероятности туннелирования в одноинстантонном приближении.

КМ моделировалась двухъямным осцилляторным потенциалом вида

$$U(q) = \frac{\omega_0^2}{2} (q - a)^2 \theta(q) + \frac{\omega_0^2}{2} (q + a)^2 \theta(-q) - |e| E q, \quad (28)$$

где  $q$  – координата туннелирования;  $\omega_0$  – характерная частота потенциала;  $\theta(q)$  – единичная функция Хевисайда;  $E$  – напряженность электрического поля.

В случае взаимодействия с выделенной локальной модой одноинстантонное действие запишется в виде

$$\begin{aligned}
 2S = & (q_1 + q_0)(3q_0 - q_1)\omega^2 \tau_0 - \frac{4\omega^2 (q_0 + q_1)^2 (\tau_0)^2}{\beta} - \\
 & - \frac{\omega^2 (q_0 + q_1)^2}{2\tilde{\gamma}} \left\{ \frac{(\omega^2 - \tilde{x}_2)}{\sqrt{\tilde{x}_1}} \left( \operatorname{cth} \left( \frac{\beta}{2} \sqrt{\tilde{x}_1} \right) - \frac{1}{\operatorname{sh} \left( \frac{\beta}{2} \sqrt{\tilde{x}_1} \right)} \left( \operatorname{ch} \left[ \left( \frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \sqrt{\tilde{x}_1} \right] \right) - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\tilde{x}_1}\right] + \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0\right)\sqrt{\tilde{x}_1}\right] \Bigg) - \frac{(\omega^2 - \tilde{x}_1)}{\sqrt{\tilde{x}_2}} \left( \operatorname{cth}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\tilde{x}_2}\right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\tilde{x}_2}\right)} \left( \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0\right)\sqrt{\tilde{x}_2}\right] - \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\tilde{x}_2}\right] + \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0\right)\sqrt{\tilde{x}_2}\right] \right) \right) \Bigg\}, \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\text{где } \tilde{x}_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \omega^2 + \omega_L^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left( \omega^2 + \omega_L^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right)^2 - 4\omega^2\omega_L^2},$$

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\left( \omega^2 + \omega_L^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right)^2 - 4\omega^2\omega_L^2}.$$

Та же формула (29) в боровских единицах принимает вид

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \frac{E_d}{\hbar} a_d^2 \varepsilon_0^{*2} l_1^2 \left( \frac{l_2}{2l_1} \tau_0^* - \tau_0^{*2} \varepsilon_T^* - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\gamma^*} \left( \frac{\varepsilon_0^{*2} - x_1^*}{\sqrt{x_1^*}} \left( \operatorname{cth}\left(\frac{\sqrt{x_1^*}}{2\varepsilon_T^*}\right) - \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{x_1^*}}{2\varepsilon_T^*}\right)} \left( 2\operatorname{ch}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon_T^*} - 2\tau_0^*\right)\frac{\sqrt{x_1^*}}{2}\right] - \operatorname{ch}\left[\frac{\sqrt{x_1^*}}{2\varepsilon_T^*}\right] \right) \right) - \right. \\
& \left. - \frac{(\varepsilon_0^{*2} - x_1^*)}{\sqrt{x_2^*}} \left( \operatorname{cth}\left(\frac{\sqrt{\tilde{x}_2}}{2\varepsilon_T^*}\right) - \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\tilde{x}_2}}{2\varepsilon_T^*}\right)} \left( 2\operatorname{ch}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon_T^*} - 2\tau_0^*\right)\frac{\sqrt{\tilde{x}_2}}{2}\right] - \operatorname{ch}\left[\frac{\sqrt{\tilde{x}_2}}{2\varepsilon_T^*}\right] \right) \right) \right) \Bigg\}, \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\text{где } x_{1,2}^* = \left( \varepsilon_0^{*2} + \varepsilon_L^{*2} + \gamma_0^*/\varepsilon_L^{*2} \right) / 2 \mp \sqrt{\left( \varepsilon_0^{*2} + \varepsilon_L^{*2} + \gamma_0^*/\varepsilon_L^{*2} \right)^2 - 4\varepsilon_0^{*2}\varepsilon_L^{*2}} / 2,$$

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\left( \varepsilon_0^{*2} + \varepsilon_L^{*2} + \gamma_0^*/\varepsilon_L^{*2} \right)^2 - 4\varepsilon_0^{*2}\varepsilon_L^{*2}},$$

$$\tau_0^* = \operatorname{Arcsh} \left[ \frac{1-b^*}{1+b^*} \operatorname{sh} \frac{\varepsilon_0^*}{2\varepsilon_T^*} \right] / \varepsilon_0^* + 1 / (2\varepsilon_T^*),$$

$$\varepsilon_T^* = kT/E_d, \quad \varepsilon_L^* = \hbar\omega_L/E_d, \quad \beta = \hbar/\varepsilon_T^*E_d, \quad U_0^* = U_0/E_d, \quad b^* = b/a,$$

$$l_1 = a^* + \tilde{b}, \quad l_2 = 3a^* - \tilde{b}, \quad a^* = q_0/a_d, \quad \tilde{b} = q_1/a_d, \quad \gamma_0^* = \hbar^4 C^2 / E_d^4.$$

С экспоненциальной точностью вероятность туннелирования  $\Gamma_0$  оценивается как  $\Gamma_0 \sim \exp(-S)$ . Предэкспоненциальный множитель  $B$  определяется вкладом траекторий, близко расположенных от инстантона. Для его вычисления действие раскладывалось до квадратичного члена по отклонениям  $q - q_B$  и производилось интегрирование в функциональном пространстве. Окончательное аналитическое выражение для предэкспоненты с учетом влияния локальной моды среды-термостата запишется в виде

$$B = \frac{2\omega_0^2(a+b)^2}{(2\pi\beta)^{1/2}} \times \left\{ \frac{A}{2\gamma_1} \left[ \sqrt{\gamma_1} \beta \operatorname{cth} \left( \frac{\sqrt{\gamma_1} \beta}{2} \right) - 1 \right] + \frac{D}{2\gamma_2} \left[ \sqrt{\gamma_2} \beta \operatorname{cth} \left( \frac{\sqrt{\gamma_2} \beta}{2} \right) - 1 \right] \right. \\ \left. + \left\{ \frac{A}{2} \left[ \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_1}} \frac{\operatorname{ch} \left( \sqrt{\gamma_1} \left( \frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_1} \beta}{2}} - \frac{1}{\gamma_1} \right] + \frac{D}{2} \left[ \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_2}} \frac{\operatorname{ch} \left( \sqrt{\gamma_2} \left( \frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_2} \beta}{2}} - \frac{1}{\gamma_2} \right] \right\}^{1/2} + \right. \\ \left. + \frac{A \left( \frac{1}{\gamma_1} - \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_1}} \frac{\operatorname{ch} \left[ \sqrt{\gamma_1} \left( \frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right]}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_1} \beta}{2}} \right) + D \left( \frac{1}{\gamma_2} - \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_2}} \frac{\operatorname{ch} \left[ \sqrt{\gamma_2} \left( \frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right]}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_2} \beta}{2}} \right)}{\left\{ \frac{A}{2} \left[ \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_1}} \frac{\operatorname{ch} \left( \sqrt{\gamma_1} \left( \frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_1} \beta}{2}} - \frac{1}{\gamma_1} \right] + \frac{D}{2} \left[ \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_2}} \frac{\operatorname{ch} \left( \sqrt{\gamma_2} \left( \frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_2} \beta}{2}} - \frac{1}{\gamma_2} \right] \right\}^{1/2}} \right\},$$

где  $A = -\frac{(\omega_L^2 - \gamma_1)}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{\omega_L^* - \frac{1}{2} [(\omega_L^* + 1 + C^*) - \sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*) - 4\omega_L^*}]}{2\sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*) - 4\omega_L^*}},$

$$D = \frac{(\omega_L^2 - \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{\omega_L^* - \frac{1}{2} [(\omega_L^* + 1 + C^*) + \sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*) - 4\omega_L^*}]}{2\sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*) - 4\omega_L^*}},$$

$$\tau^* = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \frac{1}{2\omega} \tau_0 = \frac{1}{2\omega} \left[ \operatorname{arcsh} \left[ \frac{1 - b^*}{1 + b^*} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2} \right] + \frac{\beta}{4} \right].$$

тогда вероятность туннелирования запишется в виде  $\Gamma_0 = B \exp(-S)$ .

На рис. 2 приведена спектральная зависимость вероятности ДФ поглощения при фотоионизации  $D^-$ -центра в КТ InSb, рассчитанная с помощью формулы (27) при наличии внешнего электрического поля для случая расположения примесного уровня как ниже дна (рис. 2,а), так и между дном удерживающего потенциала и уровнем энергии основного состояния КТ (рис. 2,б). Из рис. 2 видно, что в электрическом поле имеет место смещение края полосы примесного поглощения в длинноволновую область спектра, что обусловлено квантово-размерным эффектом Штарка.

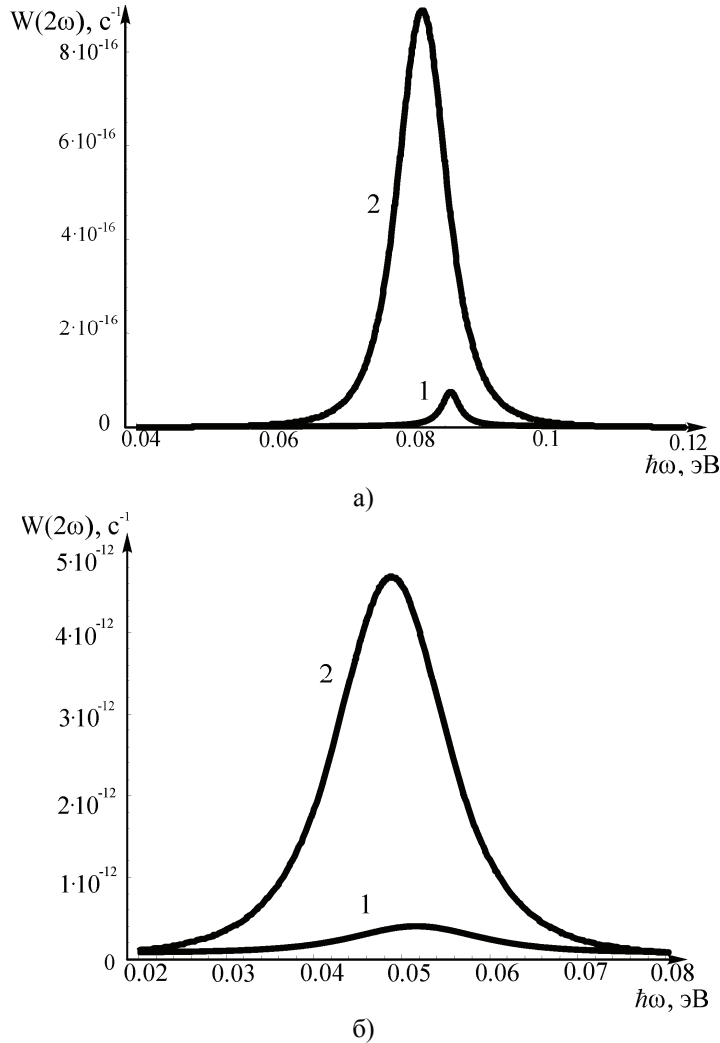


Рис. 2 Спектральная зависимость вероятности ДФ ионизации  $D^-$ -центра в условиях внешнего электрического поля  $E_0$ : 1 –  $E_0 = 0$ ; 2 –  $E_0 = 10^6$  В/м:  
а –  $\eta_i > 0$  ( $U_0^* = 250$ ); б –  $\eta_i < 0$  ( $U_0^* = 450$ )

Можно видеть также, что вероятность ДФ переходов с примесных уровней, соответствующих квазистационарным  $D^-$ -состояниям (рис. 2,б), на несколько порядков превышает вероятность ДФ перехода с примесных уров-

ней, расположенных ниже дна КТ. Это связано с увеличением степени перекрытия волновых функций начального, виртуального и конечного состояний электрона, несмотря на то, что существование квазистационарных  $D^-$ -состояний обеспечивается гораздо большей величиной амплитуды потенциала конфинмента КТ (ср. рис. 1,а и рис. 1,б). Таким образом, вклад квазистационарных  $D^-$ -состояний в вероятность ДФ примесного поглощения в КТ может существенно превышать вклад  $D^-$ -состояний с примесными уровнями, расположенными ниже дна удерживающего потенциала КТ. Следует отметить, что вариация величины напряженности поля  $E_0$  может приводить к трансформации двухъямного потенциала, причем переход к симметричной форме сопровождается появлением пика на полевой зависимости вероятности туннелирования (см. вставку на рис. 3) в КМ. На рис. 3 показано, что данный пик может быть идентифицирован на зависимости вероятности ДФ примесного поглощения в КМ от величины напряженности внешнего электрического поля за счет изменения ширины энергетических уровней виртуального и конечного состояний.

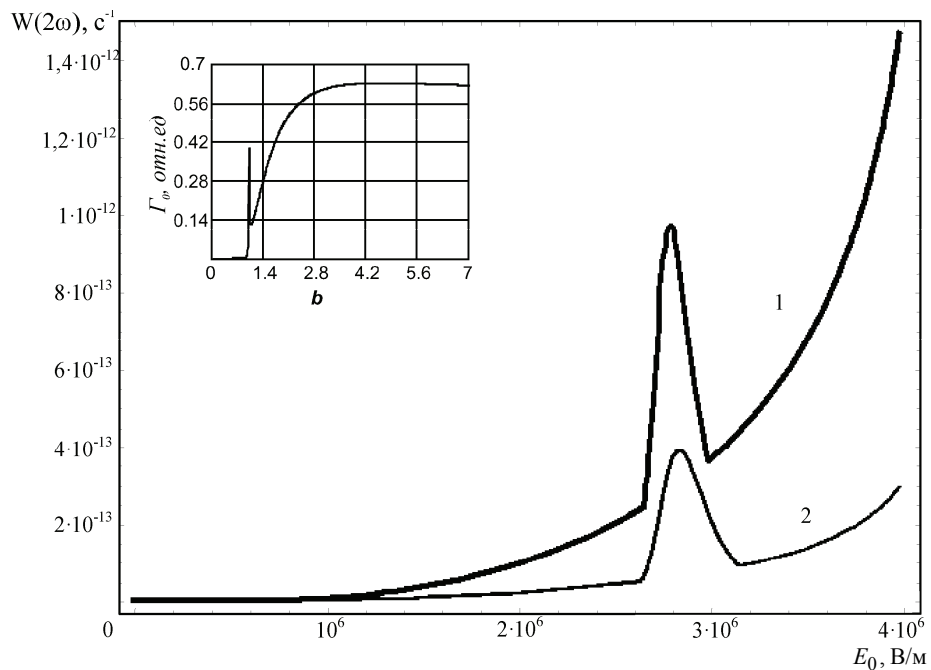


Рис. 3 Зависимость вероятности ДФ ионизации  $D^{(-)}$ -центра в квантовой молекуле от величины напряженности внешнего электрического поля  $E_0$

при  $U_0^* = 250$ ,  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 0,5$ ,  $\eta_i = 7$  для разных значений параметра  $\epsilon_T = kT/E_d$ : 1 –  $\epsilon_T = 2,5$ ; 2 –  $\epsilon_T = 2$

На вставке к рис. 3 представлена зависимость вероятности  $1D$ -туннелирования от параметра асимметрии  $b$ , пропорционального величине напряженности внешнего электрического поля.

Таким образом, характерная особенность вероятности  $1D$ -диссипативного туннелирования в виде пика проявляется в полевой зависимости вероят-



ности ДФ примесного поглощения в КМ при величине напряженности внешнего электрического поля, когда двухъямный осцилляторный потенциал становится симметричным.

### Список литературы

1. **Жуковский, В. Ч.** Квантовые эффекты в мезоскопических системах. Ч. 1. Квантовое туннелирование с диссипацией : учебное пособие для студентов физического факультета МГУ / В. Ч. Жуковский, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, А. И. Тернов. – М. : Физический факультет МГУ, 2002. – 108 с.
2. **Овчинников, А. А.** Введение в современную мезоскопию : учебное пособие / А. А. Овчинников, В. Ч. Жуковский, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов [и др.]. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2003. – 570 с.
3. **Овчинников, А. А.** Принципы управляемой модуляции низкоразмерных структур : монография / А. А. Овчинников, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов [и др.]. – М. : УНЦ ДО, 2003. – 510 с.
4. **Krevchik, V. D.** Transfer processes in low-dimensional systems : коллективная монография, мемориальный сборник статей, посвященная памяти А. А. Овчинникова и А. И. Ларкина, при участии Нобелевского лауреата, проф. Э. Леггетта / V. D. Krevchik, M. B. Semenov, V. Ya. Krivnov, K. Yamamoto etc. ; UT Research Institute Press. – Tokyo, Japan, 2005. – 690 p.
5. **Жуковский, В. Ч.** Особенности спектров двухфотонного примесного поглощения в квантовой молекуле с туннельно-прозрачным потенциальным барьером / В. Ч. Жуковский, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов [и др.] // Вестник МГУ. – 2009. – Вып. 6. – С. 20–24. – (Сер. 3. Физика. Астрономия).
6. **Кревчик, В. Д.** Управляемое диссипативное туннелирование : коллективная монография, посвященная памяти академика РАН А. И. Ларкина ; под ред. Нобелевского лауреата Э. Леггетта ; при ред. участии В. Д. Кревчика, М. Б. Семенова, К. Ямамото и др.) / В. Д. Кревчик, Э. Леггетт, Ю. Н. Овчинников, М. Б. Семенов, К. Ямамото [и др.]. – М. : Изд-во физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 2009. – Ч. 1, 2,

#### **Кревчик Владимир Дмитриевич**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
физики, Пензенский государственный  
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

#### **Krevchik Vladimir Dmitrievich**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
professor, head of sub-department  
of physics, Penza State University

#### **Семенов Михаил Борисович**

доктор физико-математических наук,  
профессор, кафедра физики, Пензенский  
государственный университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

#### **Semenov Mikhail Borisovich**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
professor, sub-department of physics,  
Penza State University

#### **Разумов Алексей Викторович**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра общей физики,  
Пензенский государственный  
педагогический университет  
им. В. Г. Белинского

E-mail: physics@pnzgu.ru

#### **Razumov Aleksey Viktorovich**

Candidate of physico-mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of general physics,  
Penza State Pedagogic University  
named after V. G. Belinsky

**Гаврина Зоя Алексеевна**  
соискатель, Пензенский  
государственный университет  
E-mail: physics@pnzgu.ru

**Gavrina Zoya Alekseevna**  
Applicant, Penza State University

**Кревчик Павел Владимирович**  
студент, Пензенский  
государственный университет  
E-mail: physics@pnzgu.ru

**Krevchik Pavel Vladimirovich**  
Student, Penza State University

---

УДК 539.2:541.117

**Кревчик, В. Д.**

**Двухфотонная спектроскопия  $1D^-$ -диссипативного туннелирования в квантовых молекулах с  $D^-$ -центрами / В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, А. В. Разумов, З. А. Гаврина, П. В. Кревчик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 130–146.**

УДК 539.2:541.117

В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов,  
А. В. Разумов, З. А. Гаврина, П. В. Кревчик

## **2D-ТУННЕЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ В СПЕКТРАХ ДВУХФОТОННОГО ПОГЛОЩЕНИЯ СВЕТА В СИСТЕМЕ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ КВАНТОВЫХ МОЛЕКУЛ**

*Аннотация.* Теоретически исследовано влияние двумерного диссипативного туннелирования на вероятность двухфотонной ионизации  $D^-$ -центра в системе двух взаимодействующих квантовых молекул. Выявлены эффекты 2D-туннельных бифуркаций и квантовых биений для случая параллельного 2D-туннелирования.

*Ключевые слова:* туннельные бифуркации, двухфотонное примесное поглощение.

*Abstract.* Influence of 2D-dissipative tunneling on the two – photon  $D^-$ -center ionization probability is theoretically investigated in this article for system of two interacting quantum molecules. The 2D-tunnel bifurcation and beats effects are revealed for the case of 2D parallel tunneling.

*Keywords:* tunnel bifurcations, two-photon impurity absorption.

### **Введение**

Исследование движения квантовой частицы, взаимодействующей с термостатом, является одной из важных проблем современной теоретической физики [1–4].

Интерес к данной проблеме в значительной степени связан с изучением туннельных сверхпроводящих контактов при низких температурах [1–3], с решением задачи квантового туннелирования с диссипацией в кристаллах [4], а также с изучением скорости ряда низкотемпературных химических реакций [5]. Интерес к дальнейшему развитию науки о квантовом туннелировании с диссипацией возрос в последние годы в связи с активизацией исследований туннельно-связанных квантовых точек (КТ) – квантовых молекул (КМ), которые, в частности, можно рассматривать как реактивные молекулярные комплексы. В этой связи становится актуальным изучение таких систем с позиций квантовой химической динамики, объединяющей методы современной квантовой физики и химической кинетики [7]. Использование методов двухфотонной (ДФ) спектроскопии позволит более детально изучить ряд особенностей 2D-диссипативного туннелирования, связанных с наличием точек бифуркации и эффекта квантовых биений.

В настоящей работе теоретически исследуется ДФ примесное поглощение в системе взаимодействующих КМ в условиях 2D-диссипативного туннелирования при наличии внешнего электрического поля.

### **2D-туннелирование в системе из двух взаимодействующих КМ**

Проведем теоретический анализ особенностей 2D-диссипативного туннелирования при наличии внешнего электрического поля. Влияние последнего учитывается через перенормировку параметров 2D-потенциала, который принимает вид

$$U_1(R_1, R_2) = \frac{\omega^2 (R_1 + a)^2}{2} \theta(-R_1) + \left[ -\Delta I + \frac{\omega^2 (R_1 - b)^2}{2} \right] \theta(R_1) + \\ + \frac{\omega^2 (R_2 + a)^2}{2} \theta(-R_2) + \left[ -\Delta I + \frac{\omega^2 (R_2 - b)^2}{2} \right] \theta(R_2) - \frac{\alpha (R_1 - R_2)^2}{2}, \quad (1)$$

здесь  $\theta(x)$  – функция Хевисайда,  $b = b_0 + |e|E_0/\omega_0^2$ ,  $a = a_0 - |e|E_0/\omega_0^2$ ,  $\Delta I$ .

При этом смена знака напряжения приводит к тому, что исходная асимметрия потенциала (правая потенциальная яма глубже левой) только усиливается, и симметрия потенциала не достигается. На рис. 1 показано изменение асимметрии поверхности потенциальной энергии для случая параллельного переноса частиц во внешнем электрическом поле при отрицательном приложенном напряжении.

Можно видеть, что при определенном значении приложенного напряжения  $2D$ -потенциал становится симметричным (рис 1,б). Для случая  $2D$ -параллельного переноса с учетом взаимодействия туннелирующих частиц, а также их взаимодействия с осцилляторами среды получена аналитическая формула для евклидова действия  $S$ . Траектория, которая минимизирует евклидово действие  $S$ , может быть найдена из уравнений движения. Моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , в которые частицы проходят вершины барьера, определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} q_1(\tau_1) = 0, \\ q_2(\tau_2) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  – координаты туннелирования.

В случае параллельного движения туннелирующих частиц (потенциальная энергия  $U_1(R_1, R_2)$ , (1)), действие  $S$  как функция параметров  $\tau_1$  и  $\tau_2$  принимает вид

$$S = 2a(b+a)(\tau_1 + \tau_2)\omega^2 - \frac{\omega^2 (a+b)^2 (\tau_1 + \tau_2)^2}{\beta} - \frac{\omega^4 (a+b)^2 (\tau_1 - \tau_2)^2}{(\omega^2 - 2\alpha)\beta} - \\ - \frac{2\omega^4 (a+b)^2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\sin v_n \tau_1 + \sin v_n \tau_2)^2}{v_n^2 (v_n^2 + \omega^2 + \xi_n)} + \frac{(\sin v_n \tau_1 - \sin v_n \tau_2)^2}{v_n^2 (v_n^2 + \omega^2 - 2\alpha)} \right\}, \quad (3)$$

где  $\xi_n$  может полагаться равным 0, если пренебречь взаимодействием с осцилляторами среды.

Введем обозначения:  $\varepsilon = \varepsilon^* \omega = (\tau_1 - \tau_2) \omega$ ;  $\tau = 2\tau^* \omega = (\tau_1 + \tau_2) \omega$ ;  $\beta^* = \beta \omega / 2$ ;  $\alpha^* = 2\alpha / \omega^2$ ;  $b^* = b/a$ ,  $b \geq a$ .

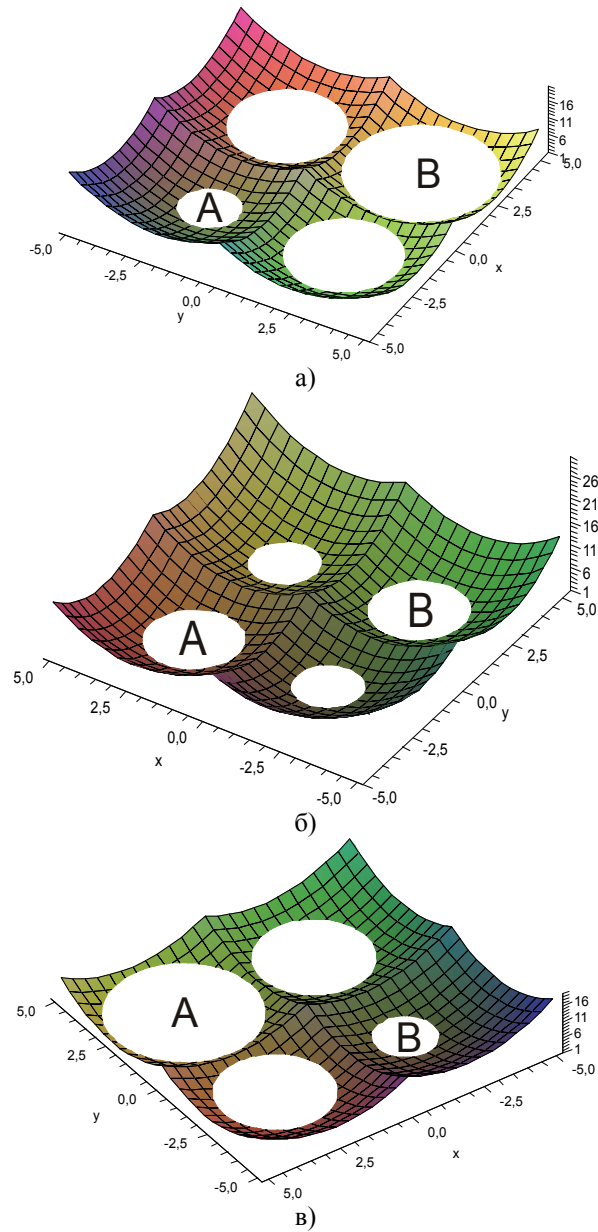


Рис. 1 Изменение асимметрии поверхности потенциальной энергии для параллельного переноса частиц во внешнем электрическом поле

Если пренебречь взаимодействием с фононами (осцилляторами среды), тогда  $\xi_n = 0$ , и действие  $S$  (3) как функция параметров  $\varepsilon$  и  $\tau$  принимает вид

$$S = (a+b)\omega\tau \left( 2a - \frac{a+b}{2} \left[ 1 + \frac{1}{1-\alpha^*} \right] \right) + \frac{\omega(a+b)^2}{2} (\tau - |\varepsilon|) \cdot \frac{\alpha^*}{1-\alpha^*} -$$

$$- \frac{\omega(a+b)^2}{2} \left\{ -\text{cth}\beta^* + \frac{1}{\text{sh}\beta^*} \left[ \text{ch}(\beta^* - \tau) \text{ch}\varepsilon + \text{ch}(\beta^* - \tau) - \text{ch}(\beta^* - |\varepsilon|) \right] \right\} -$$

$$-\frac{\omega(a+b)^2}{2(1-\alpha^*)^{3/2}} \left\{ -\operatorname{cth}\left(\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}\right) + \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}\right)} \left[ \operatorname{ch}\left(\left(\beta^*-\tau\right)\sqrt{1-\alpha^*}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{ch}\left(\varepsilon\sqrt{1-\alpha^*}\right) - \operatorname{ch}\left(\left(\beta^*-\tau\right)\sqrt{1-\alpha^*}\right) + \operatorname{ch}\left(\left(\beta^*-\varepsilon\right)\sqrt{1-\alpha^*}\right) \right] \right\}. \quad (4)$$

В случае взаимодействия с выделенной локальной осцилляторной модой среды  $\omega_L$  выражение для действия  $S$  как функции параметров  $\varepsilon^*$  и  $\tau^*$  ( $\varepsilon^* = \tau_1 - \tau_2$ ,  $\tau^* = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$ ) принимает вид

$$S = (b+a)(3a-b) \omega^2 \tau^* - \frac{\omega^4 (a+b)^2 \varepsilon^*}{2(\omega^2 - 2\alpha)} - \frac{4\omega^2 (a+b)^2 (\tau^*)^2}{\beta} - \frac{\omega^4 (a+b)^2 (\varepsilon^*)^2}{(\omega^2 - 2\alpha)\beta} - \\ - \frac{\omega^2 (a+b)^2}{2\tilde{\gamma}} \left\{ \frac{(\omega^2 - \tilde{x}_2)}{\sqrt{\tilde{x}_1}} \left( \operatorname{cth}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\tilde{x}_1}\right) - \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\tilde{x}_1}\right)} \left( \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2} - 2\tau^*\right)\sqrt{\tilde{x}_1}\right] - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2} - \varepsilon^*\right)\sqrt{\tilde{x}_1}\right] + \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2} - \varepsilon^* - 2\tau^*\right)\sqrt{\tilde{x}_1}\right] + \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2} - 2\tau^* + \varepsilon^*\right)\sqrt{\tilde{x}_1}\right] \right) \right\} - \\ - \frac{(\omega^2 - \tilde{x}_1)}{\sqrt{\tilde{x}_2}} \left( \operatorname{cth}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\tilde{x}_2}\right) - \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\tilde{x}_2}\right)} \left( \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2} - 2\tau^*\right)\sqrt{\tilde{x}_2}\right] - \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2} - \varepsilon^*\right)\sqrt{\tilde{x}_2}\right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2} - \varepsilon^* - 2\tau^*\right)\sqrt{\tilde{x}_2}\right] + \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2} - 2\tau^* + \varepsilon^*\right)\sqrt{\tilde{x}_2}\right] \right) \right\} - \frac{\omega^4 (a+b)^2}{2(\omega^2 - 2\alpha)^{3/2}} \times \\ \times \left\{ -\operatorname{cth}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\omega^2 - 2\alpha}\right) + \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\omega^2 - 2\alpha}\right)} \left( \operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2} - \varepsilon^*\right)\sqrt{\omega^2 - 2\alpha}\right] - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2}-2\tau^*\right)\sqrt{\omega^2-2\alpha}\right]+\frac{1}{2}\operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2}-\varepsilon^*-2\tau^*\right)\sqrt{\omega^2-2\alpha}\right]+ \\
& \left. +\frac{1}{2}\operatorname{ch}\left[\left(\frac{\beta}{2}-2\tau^*+\varepsilon^*\right)\sqrt{\omega^2-2\alpha}\right]\right\}, \quad (5)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{1,2} &= \left(\omega^2 + \omega_L^2 + C^2/\omega_L^2\right)/2 \mp \sqrt{\left(\omega^2 + \omega_L^2 + C^2/\omega_L^2\right)^2 - 4\omega^2\omega_L^2}/2, \\
\tilde{\gamma} &= \sqrt{\left(\omega^2 + \omega_L^2 + C^2/\omega_L^2\right)^2 - 4\omega^2\omega_L^2}.
\end{aligned}$$

То же действие в боровских единицах записывается в виде

$$\begin{aligned}
S &= a^* \sqrt{U_0^*} \left\{ \left( \frac{b^* + W_0}{a^* - W_0} + 1 \right) \left( 3 - \frac{b^* + W_0}{a^* - W_0} \right) \tau^* - \frac{\left( 1 + \frac{b^* + W_0}{a^* - W_0} \right)^2 \varepsilon^*}{2(1 - \alpha^*)} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\left( 1 + \frac{b^* + W_0}{a^* - W_0} \right)^2 \tau^{*2}}{2\beta^*} - \frac{\left( 1 + \frac{b^* + W_0}{a^* - W_0} \right)^2 \varepsilon^{*2}}{(1 - \alpha^*)\beta^*} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\left( 1 + \frac{b^* + W_0}{a^* - W_0} \right)^2}{2\gamma^*} \left\{ \frac{(1 - x_2^*)}{\sqrt{x_1^*}} \left( \operatorname{cth}(\beta^* \sqrt{x_1^*}) - \frac{1}{\operatorname{sh}(\beta^* \sqrt{x_1^*})} \left( \operatorname{ch}[(\beta^* - \tau^*)\sqrt{x_1^*}] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \operatorname{ch}[(\beta^* - \varepsilon^*)\sqrt{x_1^*}] + \frac{1}{2}\operatorname{ch}[(\beta^* - \varepsilon^* - \tau^*)\sqrt{x_1^*}] + \frac{1}{2}\operatorname{ch}[(\beta^* - \tau^* + \varepsilon^*)\sqrt{x_1^*}] \right) \right\} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{(1 - x_1^*)}{\sqrt{x_2^*}} \left( \operatorname{cth}(\beta^* \sqrt{x_2^*}) - \frac{1}{\operatorname{sh}(\beta^* \sqrt{x_2^*})} \left( \operatorname{ch}[(\beta^* - \tau^*)\sqrt{x_2^*}] - \operatorname{ch}[(\beta^* - \varepsilon^*)\sqrt{x_2^*}] + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \left[ \left( \beta^* - \varepsilon^* - \tau^* \right) \sqrt{x_2^*} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \left[ \left( \beta^* - \tau^* + \varepsilon^* \right) \sqrt{x_2^*} \right] \left. \right\} - \frac{\left( 1 + \frac{b^* + W_0}{a^* - W_0} \right)^2}{2(1 - \alpha^*)^{3/2}} \times \\
 & \times \left\{ -\operatorname{cth} \left( \beta^* \sqrt{1 - \alpha^*} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} \left( \beta^* \sqrt{1 - \alpha^*} \right)} \left( \operatorname{ch} \left[ \left( \beta^* - \varepsilon^* \right) \sqrt{1 - \alpha^*} \right] - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \operatorname{ch} \left[ \left( \beta^* - \tau^* \right) \sqrt{1 - \alpha^*} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \left[ \left( \beta^* - \varepsilon^* - \tau^* \right) \sqrt{1 - \alpha^*} \right] + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \left[ \left( \beta^* - \tau^* + \varepsilon^* \right) \sqrt{1 - \alpha^*} \right] \right) \right\}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где  $\beta^* = \sqrt{U_0^*} / a^* \varepsilon_T^*$ ,  $\varepsilon_T^* = kT / E_d$ ,  $\varepsilon_c^* = \hbar \sqrt{c} / E_d$ ,  $\varepsilon_L^* = \hbar \omega_L / E_d$ ,  $b^* = b / a_d$ ,

$$a^* = a / a_d, \quad \tilde{\gamma}^* = \sqrt{\left( \varepsilon_L^{*2} a^{*2} / 4U_0^* + 1 + \varepsilon_c^4 a^{*2} / 4\varepsilon_L^{*2} U_0^* \right)^2 - \varepsilon_L^{*2} a^{*2} / U_0^*},$$

$$\begin{aligned}
 x_1^* &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_L^{*2} a^{*2} / 4U_0^* + 1 + \varepsilon_c^4 a^{*2} / 4\varepsilon_L^{*2} U_0^* - \right. \\
 & \quad \left. - \sqrt{\left( \varepsilon_L^{*2} a^{*2} / 4U_0^* + 1 + \varepsilon_c^4 a^{*2} / 4\varepsilon_L^{*2} U_0^* \right)^2 - \varepsilon_L^{*2} a^{*2} / U_0^*} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2^* &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_L^{*2} a^{*2} / 4U_0^* + 1 + \varepsilon_c^4 a^{*2} / 4\varepsilon_L^{*2} U_0^* + \right. \\
 & \quad \left. + \sqrt{\left( \varepsilon_L^{*2} a^{*2} / 4U_0^* + 1 + \varepsilon_c^4 a^{*2} / 4\varepsilon_L^{*2} U_0^* \right)^2 - \varepsilon_L^{*2} a^{*2} / U_0^*} \right].
 \end{aligned}$$

Следующая система связывает величины  $\tau$  и  $\varepsilon$  между собой и с параметрами туннелирования системой из двух трансцендентных уравнений вида

$$\begin{cases}
 \operatorname{sh} \varepsilon \left[ \operatorname{ch} \tau \operatorname{cth} \beta^* - \operatorname{sh} \tau - \operatorname{cth} \beta^* \right] + \frac{1}{1 - \alpha^*} \operatorname{sh} \left( \varepsilon \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \times \\
 \times \left[ \operatorname{ch} \left( \tau \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \operatorname{cth} \left( \beta^* \sqrt{1 - \alpha^*} \right) - \operatorname{sh} \left( \tau \sqrt{1 - \alpha^*} \right) + \operatorname{cth} \left( \beta^* \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \right] = 0, \\
 3 - \frac{4}{1 + b^*} - \frac{1}{1 - \alpha^*} + \operatorname{ch} \varepsilon \left[ \operatorname{sh} \tau \operatorname{cth} \beta^* - \operatorname{ch} \tau - 1 \right] + \operatorname{sh} \tau \operatorname{cth} \beta^* - \operatorname{ch} \tau + \\
 + \frac{1}{1 - \alpha^*} \operatorname{ch} \left( \varepsilon \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \left[ \operatorname{sh} \left( \tau \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \operatorname{cth} \left( \beta^* \sqrt{1 - \alpha^*} \right) - \operatorname{ch} \left( \tau \sqrt{1 - \alpha^*} \right) + 1 \right] - \\
 - \frac{1}{1 - \alpha^*} \left[ \operatorname{sh} \left( \tau \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \operatorname{cth} \left( \beta^* \sqrt{1 - \alpha^*} \right) - \operatorname{ch} \left( \tau \sqrt{1 - \alpha^*} \right) \right] = 0.
 \end{cases} \quad (7)$$



Решение системы уравнений (6) получаем в следующей форме:

$$\varepsilon = (\tau_1 - \tau_2)\omega = 0, \quad \forall \beta, \quad \alpha < \frac{\omega^2}{2};$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{\tau}{2\omega} = \frac{1}{2\omega} \operatorname{Arcsh} \left[ \frac{1-b^*}{1+b^*} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2} \right] + \frac{\beta}{4}. \quad (8)$$

При достаточно низких температурах ( $\omega\beta \gg 1$ ) с экспоненциальной точностью при  $1 < b/a < 3$ ;  $(b-a)/2(b+a) \leq 2\alpha/\omega^2 < 2(b-a)/(3b-a) = \alpha_c^*$ , появляется еще одно решение:

$$e^{-\tau\sqrt{1-\alpha^*}} \cong \left[ 3 - \frac{4}{1+b^*} - \frac{1}{1-\alpha^*} \right] (1-\alpha^*)^{1/(1-\sqrt{1-\alpha^*})} \times$$

$$\times \left\{ 1 + (1-\alpha^*)^{1/(1-\sqrt{1-\alpha^*})} \left[ -\frac{1}{1-\alpha^*} + \left( 3 - \frac{4}{1+b^*} - \frac{1}{1-\alpha^*} \right) / (1-\sqrt{1-\alpha^*}) \right] \right\}^{-1};$$

$$e^{-\varepsilon} \cong \left\{ \left[ 3 - \frac{4}{1+b^*} - \frac{1}{1-\alpha^*} \right] + \frac{1}{1-\alpha^*} e^{-\tau\sqrt{1-\alpha^*}} \right\} / e^{-\tau\sqrt{1-\alpha^*}}, \quad (9)$$

где  $\alpha^* = \alpha m^* a^{*2} a_d^2 / U_0^* E_d$ .

Решение (9) справедливо для

$$\beta > -\frac{1}{\omega} \ln \left\{ \exp \left( -\tau\sqrt{1-\alpha^*} \right) \right\} = \beta_c. \quad (10)$$

### Особенности 2D-туннелирования в спектрах ДФ поглощения

Решение системы уравнений (6) позволяет выявить бифуркацию 2D-туннельных траекторий при определенных значениях температуры, либо параметра асимметрии потенциала (связанного с величиной внешнего электрического поля), либо коэффициента взаимодействия  $\alpha$  [6, 7]. Численный анализ системы (6) позволяет также выявить тонкую структуру перехода в окрестности точки бифуркации, т.е. режим квантовых биений для параллельного переноса туннелирующих частиц (при этом кроме тривиального решения (7) появляются еще два). На рис. 2 представлена рассчитанная зависимость вероятности ДФ ионизации  $D^{(-)}$ -центра в системе, состоящей из двух взаимодействующих КМ, от величины напряженности внешнего электрического поля в условиях 2D-диссипативного туннелирования. Из рис. 2 видно, что для полевой зависимости вероятности ДФ примесного поглощения характерен излом, соответствующий точке 2D-бифуркации – как результат смены режима 2D-диссипативного туннелирования с синхронного на асинхронный. Видно также, что в малой окрестности точки бифуркации реализуется режим квантовых биений, связанный с существованием конкурирующих решений при поиске 2D-инстантона. Можно видеть, что с ростом постоянной взаимо-

действия  $\alpha$  точка  $2D$ -бифуркации смещается в область более сильных полей (ср. рис. 2,а и рис. 2,б), что обусловлено изменением симметрии  $2D$ -потенциала за счет усиления кулоновского отталкивания туннелирующих частиц.

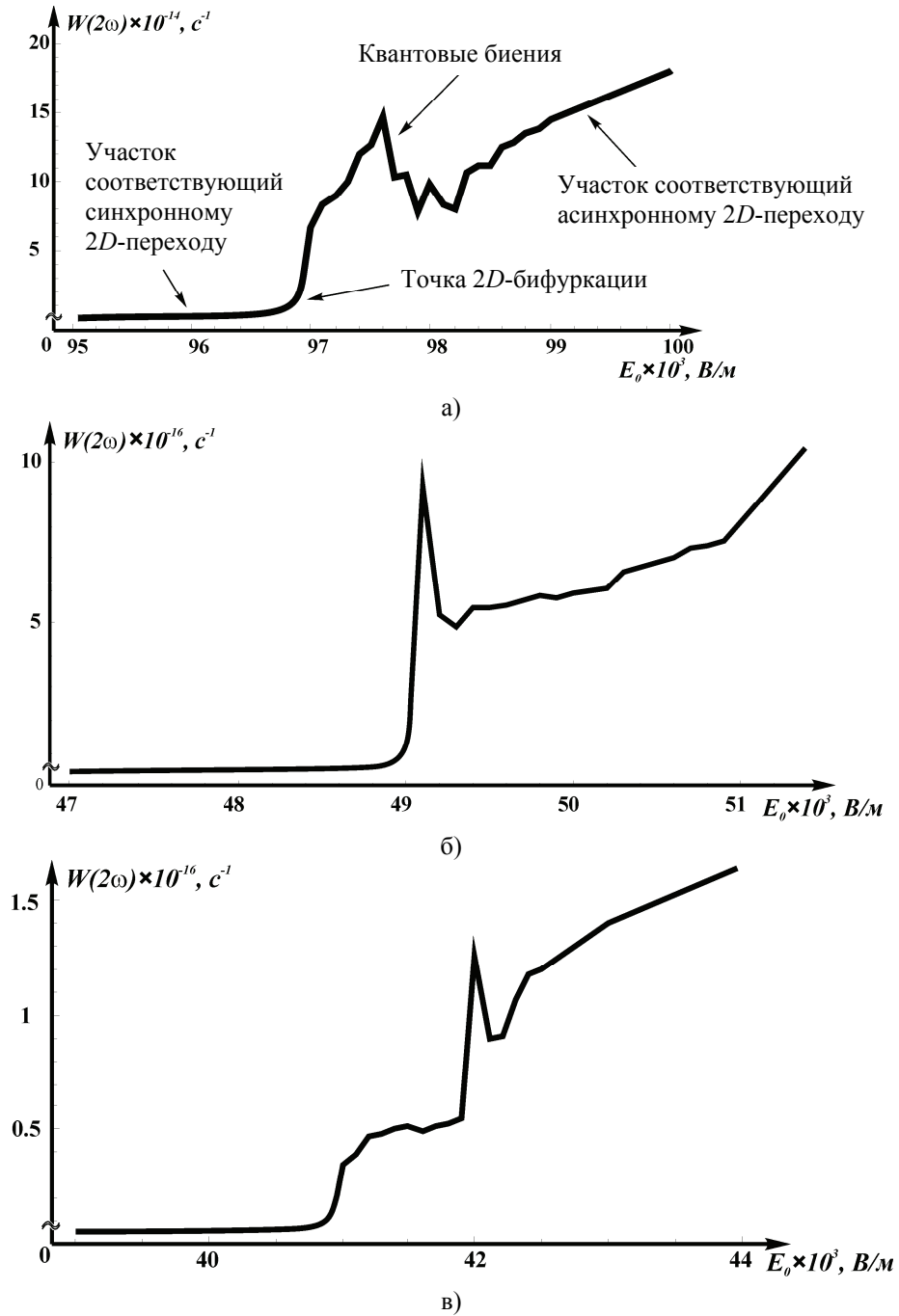


Рис. 2 Зависимость вероятности ДФ ионизации  $D^{(-)}$ -центра в системе, состоящей из двух взаимодействующих КМ от величины напряженности электрического поля  $E_0$ , при  $U_0^* = 250$ ,  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 1,5$ ,  $\eta_i = 7$ ,  $\epsilon_L = 1$ ,  $\epsilon_C = 1$ :  
 а –  $\alpha = 0,38$ ,  $\epsilon_T = 1$ ; б –  $\alpha = 0,37$ ,  $\epsilon_T = 1$ ; в –  $\alpha = 0,37$ ,  $\epsilon_T = 1,5$

Аналогичная ситуация имеет место и при уменьшении температуры (параметр  $\epsilon_T$ ) (ср. рис. 2,в и 2,б). С уменьшением параметра  $\epsilon_T$  вероятность  $2D$ -туннелирования уменьшается, и, следовательно, требуется большая величина напряженности внешнего электрического поля для увеличения асимметрии  $2D$ -потенциала. Таким образом, эффекты бифуркаций и квантовых биений существенно зависят от таких параметров  $2D$ -туннелирования, как температура и постоянная взаимодействия туннелирующих частиц. При этом роль внешнего электрического поля сводится к восстановлению асимметрии  $2D$ -потенциала, необходимой для появления бифуркаций.

### Список литературы

- 1 **Жуковский, В. Ч.** Квантовые эффекты в мезоскопических системах. Ч. 1. Квантовое туннелирование с диссипацией : учебное пособие для студентов физического факультета МГУ / В. Ч. Жуковский, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, А. И. Тернов. – М. : Физический факультет МГУ, 2002. – 108 с.
- 2 **Овчинников, А. А.** Введение в современную мезоскопию : учебное пособие / А. А. Овчинников, В. Ч. Жуковский, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов [и др.]. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2003. – 570 с.
- 3 **Овчинников, А. А.** Принципы управляемой модуляции низкоразмерных структур : монография / А. А. Овчинников, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов [и др.]. – М. : УНЦ ДО, 2003. – 510 с.
- 4 **Ovchinnikov, A. A.** Two-dimensional tunnel correlations with dissipation / A. A. Ovchinnikov, V. D. Krevchik, M. B. Semenov, V. Ya. Krivnov, K. Yamamoto etc. // *Physical Review B*. – 2003. – V. 68. – P. 155426.
- 5 **Krevchik, V. D.** Transfer processes in low - dimensional systems : коллективная монография, мемориальный сборник статей, посвященная памяти А. А. Овчинникова и А. И. Ларкина ; при участии Нобелевского лауреата, проф. Э. Леггетта / V. D. Krevchik, M. B. Semenov, V. Ya. Krivnov, K. Yamamoto etc. ; UT Research Institute Press. – Tokyo, Japan, 2005. – 690 p.
- 6 **Жуковский, В. Ч.** Наблюдаемые двумерные туннельные бифуркации во внешнем электрическом поле / В. Ч. Жуковский, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, О. Н. Горшков [и др.] // *Вестник МГУ*. – 2009. – Вып. 5. – С. 3–8. – (Сер. 3. Физика. Астрономия).
- 7 **Кревчик, В. Д.** Управляемое диссипативное туннелирование : коллективная монография, посвященная памяти академика РАН А. И. Ларкина ; под ред. Нобелевского лауреата Э. Леггетта ; при ред. участии В. Д. Кревчика, М. Б. Семенова, К. Ямамото и др. / В. Д. Кревчик, Э. Леггетт, Ю. Н. Овчинников, М. Б. Семенов, К. Ямамото [и др.]. – М. : Изд-во физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 2009. – Ч. 1, 2.

---

#### **Кревчик Владимир Дмитриевич**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
физики, Пензенский государственный  
университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

#### **Krevchik Vladimir Dmitrievich**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
professor, head of sub-department  
of physics, Penza State University

***Семенов Михаил Борисович***

доктор физико-математических наук,  
профессор, кафедра физики, Пензенский  
государственный университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

***Semenov Mikhail Borisovich***

Doctor of physico-mathematical sciences,  
professor, sub-department of physics,  
Penza State University

***Разумов Алексей Викторович***

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра общей физики,  
Пензенский государственный  
педагогический университет  
им. В. Г. Белинского

E-mail: physics@pnzgu.ru

***Razumov Aleksey Viktorovich***

Candidate of physico-mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of general physics,  
Penza State Pedagogic University  
named after V. G. Belinsky

***Гаврина Зоя Алексеевна***

соискатель, Пензенский  
государственный университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

***Gavrina Zoya Alekseevna***

Applicant, Penza State University

***Кревчик Павел Владимирович***

студент, Пензенский  
государственный университет

E-mail: physics@pnzgu.ru

***Krevchik Pavel Vladimirovich***

Student, Penza State University

---

УДК 539.2:541.117

**Кревчик, В. Д.**

**2D-туннельные бифуркации в спектрах двухфотонного поглощения света в системе двух взаимодействующих квантовых молекул / В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, А. В. Разумов, З. А. Гаврина, П. В. Кревчик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 147–156.**

### ***Вниманию авторов!***

Редакция журнала «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» приглашает специалистов опубликовать на его страницах оригинальные статьи, содержащие новые научные результаты в области математики, физики, механики, а также обзорные статьи по тематике журнала.

Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

Редакция принимает к рассмотрению статьи, подготовленные с использованием текстового редактора Microsoft Word for Windows версий не выше 2003.

Необходимо представить статью в электронном виде (VolgaVuz@mail.ru, дискета 3,5", CD-диск) и дополнительно на бумажном носителе в двух экземплярах.

Оптимальный объем рукописи 10–14 страниц формата А4. Основной шрифт статьи – Times New Roman, 14 pt через полуторный интервал. Тип файла в электронном виде – RTF.

Статья **обязательно** должна сопровождаться индексом УДК, краткой аннотацией и ключевыми словами **на русском и английском языках**.

Рисунки и таблицы должны быть размещены в тексте статьи и представлены в виде отдельных файлов (растровые рисунки в формате TIFF, BMP с разрешением 300 dpi, векторные рисунки в формате Corel Draw с минимальной толщиной линии 0,75 pt). Рисунки должны сопровождаться подрисовочными подписями.

Формулы в тексте статьи выполняются в редакторе формул Microsoft Word Equation, версия 3.0 и ниже. Символы греческого и русского алфавита должны быть набраны прямо, нежирно; латинского – курсивом, нежирно; обозначения векторов и матриц прямо, жирно; цифры – прямо, нежирно. Наименования химических элементов набираются прямо, нежирно. Эти же требования **необходимо** соблюдать и в рисунках. Допускается вставка в текст специальных символов (с использованием шрифтов Symbol).

В списке литературы **нумерация источников** должна соответствовать **очередности ссылок** на них в тексте ([1], [2], ...). Номер источника указывается в квадратных скобках. В списке указывается:

- для книг – фамилия и инициалы автора, название, город, издательство, год издания, том, количество страниц;
- для журнальных статей, сборников трудов – фамилия и инициалы автора, название статьи, полное название журнала или сборника, серия, год, том, номер, выпуск, страницы;
- для материалов конференций – фамилия и инициалы автора, название статьи, название конференции, время и место проведения конференции, город, издательство, год, страницы.

В конце статьи допускается указание наименования программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

К материалам статьи **должна** прилагаться информация для заполнения учетного листа автора: фамилия, имя, отчество, место работы и должность, ученая степень, ученое звание, адрес, контактные телефоны (желательно сотовые), e-mail.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Рукопись, полученная редакцией, не возвращается.

Редакция оставляет за собой право проводить редакторскую и допечатную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла, без согласования с автором.

**Статьи, оформленные без соблюдения приведенных выше требований, к рассмотрению не принимаются.**

### ***Уважаемые читатели!***

Для гарантированного и своевременного получения журнала «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» рекомендуем вам оформить подписку.

Журнал выходит 4 раза в год по тематике:

- ***математика***
- ***физика***
- ***механика***

Стоимость одного номера журнала – 250 руб. 00 коп.

Для оформления подписки через редакцию необходимо заполнить и отправить заявку в редакцию журнала: факс (841-2) 56-34-96, тел.: 36-82-06, 56-47-33; E-mail: [VolgaVuz@mail.ru](mailto:VolgaVuz@mail.ru)

Подписку на второе полугодие 2010 г. можно также оформить по каталогу агентства «РОСПЕЧАТЬ» «Газеты. Журналы» тематический раздел «Известия высших учебных заведений». Подписной индекс – 36949.

---

### **ЗАЯВКА**

Прошу оформить подписку на журнал «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» на 2010 г.

№ 1 – \_\_\_\_\_ шт., № 2 – \_\_\_\_\_ шт., № 3 – \_\_\_\_\_ шт., № 4 – \_\_\_\_\_ шт.

Наименование организации (полное) \_\_\_\_\_

ИНН \_\_\_\_\_ КПП \_\_\_\_\_

Почтовый индекс \_\_\_\_\_

Республика, край, область \_\_\_\_\_

Город (населенный пункт) \_\_\_\_\_

Улица \_\_\_\_\_ Дом \_\_\_\_\_

Корпус \_\_\_\_\_ Офис \_\_\_\_\_

ФИО ответственного \_\_\_\_\_

Должность \_\_\_\_\_

Тел. \_\_\_\_\_ Факс \_\_\_\_\_ E-mail \_\_\_\_\_

Руководитель предприятия \_\_\_\_\_

(подпись)

(ФИО)

Дата «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2010 г.